

Final, Diciembre del 2014

1. Dada la matriz A simétrica, Aplique el método de Jacobi para hallar las raíces y vectores característicos, si:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

por Jacobi, la matriz de rotación plana es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{pmatrix}$$

C=coseno S=seno

El ángulo θ de la rotación plana es:

$$\theta = 0.5 \operatorname{atan} \left(\frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}} \right)$$

```

      [,1]      [,2]      [,3]
[1,]    4 0.000000e+00 0.000000e+00
[2,]    0 5.828427e+00 -3.445595e-16
[3,]    0 -1.408684e-16 1.715729e-01

```

```
[1] 4.0000 5.8284 0.1716
```

```

      [,1]      [,2]      [,3]
[1,]    1 0.0000000 0.0000000
[2,]    0 0.9238795 -0.3826834
[3,]    0 0.3826834 0.9238795

```

Esto significa que para $\lambda_1 = 4$ el vector asociado es $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 5.8284$, el vector asociado $\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9238 \\ 0.3826 \end{pmatrix}$

y para $\lambda_3 = 0.1715$, el vector asociado $\phi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3826 \\ 0.9238 \end{pmatrix}$

2. Encontrar la relación de las diferencias divididas con diferencias finitas hacia adelante si las X' s están igualmente espaciadas. Utilice n pares de puntos (x_i, f_i)

Para diferencias finitas hacia adelante, los puntos x_i están igualmente espaciadas $x_{k+1} = x_k + h$, a las que corresponde valores de función $f(x) : f(x_k)$ y se definen las primeras diferencias finitas hacia adelante como:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

Para el caso de las diferencias divididas, los espaciamentos pueden ser diferentes, cuando los espaciamentos son iguales se puede establecer una equivalencia con las diferencias finitas hacia adelante, así:

$$\{x_0, x_1\} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{-\Delta f_0}{-h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$\{x_0, x_1, x_2\} = \frac{\{x_0, x_1\} - \{x_1, x_2\}}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{\Delta f_0}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \frac{\{x_0, x_1, x_2\} - \{x_1, x_2, x_3\}}{x_0 - x_3} = \frac{\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} - \frac{\Delta^2 f_1}{2h^2}}{3h} = \frac{\Delta^3 f_0}{3 \cdot 2h^3} = \frac{\Delta^3 f_0}{3!h^3}$$

Se supone cierto para $(n-1)$

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} = \frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)!h^{n-1}}$$

Entonces para n puntos

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \frac{\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}}{x_0 - x_n}$$

Reemplazando sus equivalentes:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \frac{\frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)!h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f_1}{(n-1)!h^{n-1}}}{nh} = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

Generalizando se tiene:

$$\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\} = \frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}$$

3. Hallar las diferencias divididas hasta segundo orden de la función e^{-x^2} si se tabula la función para $x = c(0.1, 0.2, 1, 1.5)$.

Realice la interpolación para $x = 0.5$.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

La función tabulada para $x = c(0.1, 0.2, 1, 1.5)$ es:

x	f(x)
[1,] 0.1	0.9900498
[2,] 0.2	0.9607894
[3,] 1.0	0.3678794
[4,] 1.5	0.1053992

el verdadero valor es: $f(0.5) = 0.7788008$

Aplicando diferencias divididas:

Primeras diferencias divididas

[1] -0.2926039 -0.7411375 -0.5249604

Segundas diferencias divididas

[1] -0.4983706 0.1662900

Valor interpolado para $x=0.5$

Iniciando en $x_0= 0.1$ es: 0.8132038

Iniciando en $x_0= 0.2$ es: 0.7135047

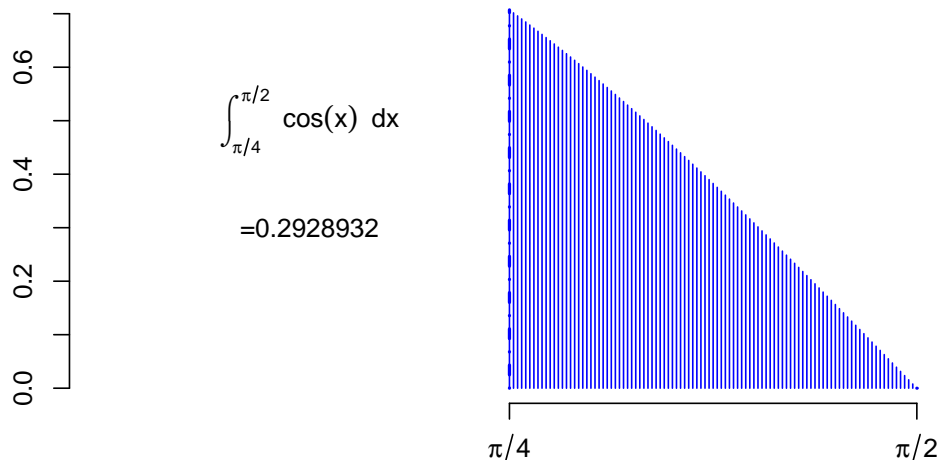


Figure 1: Integral

Entonces el error absoluto es:

$$\epsilon_{f(0.5)} = |0.8132038 - 0.7788008| = 0.0344$$

$$\epsilon_{f(0.5)} = |0.7135047 - 0.7788008| = 0.0652$$

—

4. Se desea hallar la integral de la función coseno entre $\pi/4$ y $\pi/2$. Utilice Simpson con extrapolación. Utilice el espaciamiento que mejor se adecue para su propósito y determine las cifras significativas de esta aproximación respecto al verdadero valor.

En Simpson se requiere un número mínimo de 3 puntos para el cálculo del área, entonces se debe generar 5 puntos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, igualmente espaciados, de tal forma que se pueda utilizar x_1, x_3, x_5 para el área con $2h$ y los puntos (x_1, x_2, x_3) y (x_3, x_4, x_5) para el área con espaciamentos iguales a h .

el valor de h sería:

$$h = \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi}{4} = \frac{1}{16}\pi$$

Los puntos de x , desde $\pi/4$ hasta $\pi/2$ serían:

$$x_1 = \frac{4}{16}\pi; \quad x_2 = \frac{5}{16}\pi; \quad x_3 = \frac{6}{16}\pi; \quad x_4 = \frac{7}{16}\pi; \quad x_5 = \frac{8}{16}\pi$$

$$\text{Espaciamiento}=h \quad I1 = \frac{h}{3} (\cos(x_1) + 4\cos(x_2) + 2\cos(x_3) + 4\cos(x_4) + \cos(x_5))$$

$$\text{Espaciamiento}=2h \quad I2 = \frac{2h}{3} (\cos(x_1) + 4\cos(x_3) + \cos(x_5))$$

$$\text{Extrapolación de Richardson } \textit{area} = \frac{2^4 I1 - I2}{2^4 - 1}$$

Número de cifras significativas

Si I es el valor exacto de la integral, y \textit{area} el aproximado, entonces:

$$\epsilon_{\textit{area}} = |\textit{area} - I|$$

Aplicando la relación de cifras significativas se tiene:

$$\epsilon_{\textit{area}} \leq 0.5 * 10^{m-n+1}$$

Como $m = -1$ para este caso, entonces:

$$\epsilon_{\textit{area}} \leq 0.5 * 10^{-n}$$

I1: 0.2928956

I2: 0.2929326

Area: 0.2928932

Error absoluto: 3.625219e-08

Como el error es menor de: $0.37 \cdot 10^{-7}$; $0.37 < 0.5$; implica que $10^{-7} = 10^{-n}$

Entonces $n = 7$; por lo tanto la aproximación tiene 7 cifras significativas.

—

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales por el método de Euler:

$$Y''' - 2XY'' + YY' = e^x$$

si las condiciones iniciales son:

$$Y(1) = 0.5$$

$$Y'(1) = -0.5$$

$$Y''(1) = 0.25$$

Hallar $Y(1.1), Y(1.2), Y(1.3)$, utilice $h = 0.1$

Este sistema se debe transformar en un sistema de ecuaciones de primer orden.

el sistema original es:

$$Y''' = e^x + 2XY'' - YY' = f(x, Y, Y', Y'')$$

la transformación será:

$$Z1 = Y$$

$$Z2 = Y'$$

$$Z3 = Y''$$

Entonces:

$$Z1' = Z2$$

$$Z2' = Z3$$

$$Z3' = f(x, Z1, Z2, Z3)$$

valores iniciales:

$$Z1(1) = 0.5; Z2(1) = -0.5; Z3(1) = 0.25;$$

el proceso iterativo segun Euler para $h=0.1$

$$Z1_{i+1} = Z1_i + 0.1 Z2_i$$

$$Z2_{i+1} = Z2_i + 0.1 Z3_i$$

$$Z3_{i+1} = Z3_i + 0.1 (e^x + 2x Z3 - Z1 Z2)$$

Mediante R.

	x	Z1	Z2	Z3
[1,]	1.0	0.5000000	-0.5000000	0.2500000
[2,]	1.1	0.4500000	-0.4750000	0.5968282
[3,]	1.2	0.4025000	-0.4153172	1.0499220
[4,]	1.3	0.3609683	-0.3103250	1.6506315

	x	Y
[1,]	1.0	0.5000000
[2,]	1.1	0.4500000
[3,]	1.2	0.4025000
[4,]	1.3	0.3609683

Puntaje 4 c/u