

## Parcial, Octubre 2015

### I. Teoría de errores

1. Los pesos de tubérculos de papa de cada parcela de  $10 \text{ m}^2$ , tienen un error relativo del 2% (0.02) y el promedio es de 20 kilos en cada parcelas. ¿Cuál es el error absoluto de los pesos cuando se expresa en toneladas por hectárea?. (1 ton = 1000 kilos y 1 ha = 10,000  $\text{m}^2$ ).

Sol.

Unidad observada =  $10^2$ ,  $\delta = 0.02$ , medida al rededor de 20 kilos, entonces  $m=1$ .

donde,

$x_i$  kilos en  $10\text{m}^2$  es equivalente a  $x_i$  ton en 1 ha., segun la relación lineal de equivalencia, or lo tanto, el mismo valor de  $x_i$  puede ser medido en su magnitud, solo que el error sera expresado en ton/ha.

el error de  $x_i$  es  $\epsilon_i$

$$\delta_i = \frac{\epsilon_i}{|x_i|}$$

Resulta

$$\epsilon_i = |x_i| \delta_i \text{ ton/ha.}$$

El promedio de 20 kilos en  $10\text{m}^2$  el error absoluto en ton/ha será:

$$\epsilon = 20(0.02) = 0.4 \text{ ton/ha}$$

2. Una muestra de los pesos de papa nativa en otro campo fue: 12.5, 10, 15, 11 y 13.5 ¿Cuál es el error absoluto de la suma de cuadrados sin corregir por el promedio?, si los errores fueron: 0.01, 0.01, 0.04, 0.05 y 0.10 respectivamente.

Sol.

$$x_1 = 12.5, x_2 = 10, x_3 = 15, x_4 = 11, x_5 = 13.5$$

$$\epsilon_1 = 0.01, \epsilon_2 = 0.01, \epsilon_3 = 0.04, \epsilon_4 = 0.05, \epsilon_5 = 0.10$$

$$y = \sum x_i^2$$

$$\epsilon_y = \sum \left| \frac{\delta y}{\delta x_i} \right| \epsilon_i$$

$$\epsilon_y = 2 * 2.5 * 0.01 + 2 * 10 * 0.01 + 2 * 15 * 0.04 + 2 * 11 * 0.05 + 2 * 13.5 * 0.1$$

```
x<-c(12.5, 10, 15, 11,13.5)
Ex<-c(0.01, 0.01, 0.04, 0.05, 0.10)
y<-sum(x^2)
Ey<-sum(2*x*Ex)
print(y)

## [1] 784.5

print(Ey)

## [1] 5.45
```

II. Ecuaciones no lineales

3. En la solución de la ecuación  $x^3 - 2x + 10 = 0$  en el intervalo  $] -3, -1[$  ¿Cuántas cifras significativas tendrá la aproximación si se realiza 3 iteraciones por bisección?.

Sol.

```
f<-function(x) x^3 - 2*x+10
```

Como la solución esta en el intervalo  $[-3, -1]$ , entonces el valor de  $m=0$

Primera iteración:

$$d = (-3-1)/2 = -2$$

$$\text{error } \epsilon \leq | -3 + 2 | = 1$$

Segunda iteración.

La segunda aproximacion esta en el intervalo:

```
f(-3)*f(-2)
```

```
## [1] -66
```

```
f(-2)*f(-1)
```

```
## [1] 66
```

Según estos resultados la raíz se encuentra en el intervalo  $] -3, -2[$

$$\text{Raíz aproximada} = (-3-2)/2 = -2.5.$$

$$\text{error } \epsilon \leq | -3 + 2.5 | = 0.5$$

La tercera aproximacion esta en el intervalo:

```
f(-3)*f(-2.5)
```

```
## [1] 6.875
```

```
f(-2.5)*f(-1)
```

```
## [1] -6.875
```

Según estos resultados la raíz se encuentra en el intervalo  $] - 3, -2.5[$

Raíz aproximada =  $(-3-2.5)/2 = -2.75$ .

error  $\epsilon \leq | - 3 + 2.75| = 0.25$

el valor de  $m=0$  implica que el error debe ser menor o igual a  $0.5 * 10^{0-n+1}$

Estableciendo la relación con el error de la tercer aproximación:

$$0.25 * 10^0 \leq 0.5 * 10^{0-n+1}$$

Significa  $0 = -n + 1$ , entonces la raíz tiene 1 cifra significativa

4. Plantear el algoritmo  $x_{i+1}$ ,  $y_{i+1}$  en función de  $x_i$  e  $y_i$  para resolver el sistema de ecuaciones  $y = tg(x)$ ,  $x = exp(-y)$  mediante el método de Newton (No resolver). Presentar en forma matricial, indicando separadamente las componentes de las matrices que conforma el algoritmo con los índices respectivos.

Sol.

Segun Newton, en forma matricial es:

$$X_{i+1} = X_i - J^{-1}F_i$$

donde:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} x_i - e^{-y_i} \\ y_i - tg(x_i) \end{pmatrix}$$

$$J \text{ es el jacobiano; } J = \begin{pmatrix} 1 & e^{-y} \\ -1/\cos^2(x) & 1 \end{pmatrix}$$

$J^{-1}$  es la inversa.

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-y} \\ 1/\cos^2(x) & 1 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{e^{-y}}{\cos^2(x)}\right)$$

El algoritmo en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{e^{-y_i}}{\cos^2(x_i)}\right) \begin{pmatrix} 1 & -e^{-y_i} \\ 1/\cos^2(x_i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - e^{-y_i} \\ y_i - tg(x_i) \end{pmatrix}$$

### III. Ecuaciones lineales

5. Se tiene un sistema sobre determinado:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_2 - x_1 = 1, x_3 - x_2 = 2, x_3 - x_1 = 1$$

Plantear el sistema a resolver por Gauss-Seidel

AX=b

Multiplicando por la transpuesta de A por el lado izquierdo se tiene:

$$A'AX = A'b$$

```
A<-rbind(c(1,0,0),c(0,1,0),c(0,0,1),c(1,-1,0),c(0,-1,1),c(-1,0,1))
b<-c(1,2,3,1,2,1)
B<-t(A)%*%A
d<-t(A)%*%b
print(data.frame(A,b),row.names = FALSE)

##  X1 X2 X3 b
##  1  0  0  1
##  0  1  0  2
##  0  0  1  3
##  1 -1  0  1
##  0 -1  1  2
## -1  0  1  1

# El nuevo sistema
names(B)<-c("X1", "x2", "x3")
print(data.frame(B,d),row.names = FALSE)

##  X1 X2 X3 d
##  3 -1 -1  1
## -1  3 -1 -1
## -1 -1  3  6
```

### Aplicando Gauss-seidel

```
n<-nrow(B)
x<-rep(0,n)
iter<-25
for (k in 1:iter){
  for (i in 1:n){
    x[i]<-(d[i]-sum(B[i,-i]*x[-i]))/B[i,i]
  }
}
cat("numero de iteraciones:",iter,"\n")

## numero de iteraciones: 25

print(x)

## [1] 1.75 1.25 3.00
```

Puntaje 4,4,4,4,4