

```
## UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
## DPTO. Estadística e Informática
## Métodos Numéricos y Simulación
```

Parcial, Octubre del 2014

1. Dada la ecuación: $\sqrt{x+5} - 2x^2 + 2x + 10 = 0$

- a. Hallar una aplicación contraída $g(x)$ diferente del algoritmo de Newton en el intervalo $I(-2,0)$.

Aplicando $\phi(x) = 1/20$ en $g(x) = x - \phi(x)f(x)$

$$g(x) = x - f(x)/20$$

```
x<-NULL
f<-function(x)sqrt(x+5)-2*x^2 +2*x+10
g<-function(x)x-f(x)/20
x[1]<- -1.5
x[2]<-g(x[1])
x[3]<-g(x[2])
x[4]<-g(x[3])
x[5]<-g(x[4])
print(x)

## [1] -1.500 -1.719 -1.842 -1.907 -1.941

  cat("\nPuntos que pertenecen al intervalo I(-2,0)")

##
## Puntos que pertenecen al intervalo I(-2,0)

b. Probar que cumple la condición de Lipschitz.

  cat("\nCondicion de Lipschitz\n")

##
## Condicion de Lipschitz

  abs(g(x[1])-g(x[2])) ; abs(x[1]-x[2])

## [1] 0.1234
## [1] 0.2185

  k <- abs(g(x[1])-g(x[2])) / abs(x[1]-x[2])
  print(k)

## [1] 0.5646

  cat("\nnuevos puntos\n")

##
## nuevos puntos
```

```

abs(g(x[2])-g(x[3])) ; abs(x[2]-x[3])
## [1] 0.06539
## [1] 0.1234
k <- abs(g(x[2])-g(x[3])) / abs(x[2]-x[3])
print(k)
## [1] 0.53
cat("\nnuevos puntos\n")
##
## nuevos puntos
abs(g(x[3])-g(x[4])) ; abs(x[3]-x[4])
## [1] 0.03341
## [1] 0.06539
k <- abs(g(x[3])-g(x[4])) / abs(x[3]-x[4])
print(k)
## [1] 0.5109
cat("\nCumple la condicion de Lipschitz\n")
##
## Cumple la condicion de Lipschitz
c. Hallar el punto fijo mediante el algoritmo  $X_{i+1} = g(X_i)$  \
cat("\nAplicando el algoritmo\n")
##
## Aplicando el algoritmo
for (i in 1:5){
  x[i+1]<-g(x[i])
}
cbind(x)
##           x
## [1,] -1.500
## [2,] -1.719
## [3,] -1.842
## [4,] -1.907
## [5,] -1.941
## [6,] -1.957

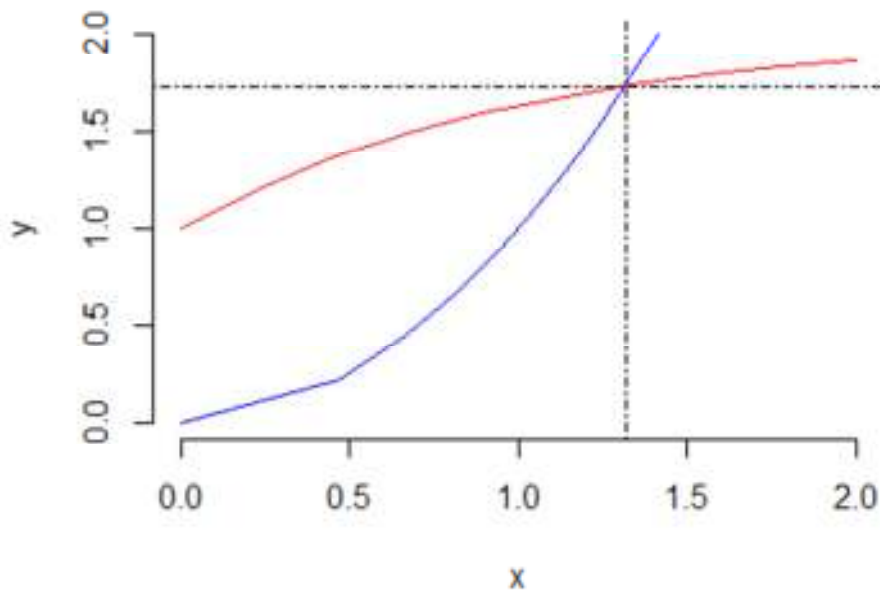
```

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\exp(-x) + y - 2 = 0$ y la ecuacion $y - x^2 = 0$. Utilice el método Newton.
 - a. Localizar graficamente las raices.

- b. Expresar algebraicamente el Jacobiano.
 - c. Aproximacion la solucion en dos iteraciones, considere el vector inicial $x=1, y=2$
 - d. Si la solucion es: $x^* = 1.315974; y^* = 1.731787$, indicar el numero de cifras significativas que tiene cada aproximación encontrada.
- a. Despejar $y = 2 - e^{-x}$ y de la segunda ecuacion $x = \sqrt{y}$

Ahora graficar $plot(x, y = 2 - e^{-x})$ y superponer la segunda $plot(y, x = \sqrt{y})$

```
f<-function(x)2-exp(-x)
g<-function(y)sqrt(y)
x<-seq(0,2,length=10)
y<-x
plot(x,f(x),type="l",xlim=c(0,2),ylim=c(0,2),axes=FALSE,col=2,ylab="")
par(new=TRUE)
plot(g(y),y,type="l",xlim=c(0,2),ylim=c(0,2),axes=FALSE,col=4,xlab="")
axis(1);axis(2)
abline(h=1.731787,v=1.315974,lty=4)
```



- b. Es la matriz de derivadas parciales de las dos ecuaciones:

$$J = \begin{pmatrix} -e^{-x} & 1 \\ -2 * x & 1 \end{pmatrix}$$

- c.

```
f<-function(x,y)exp(-x) + y - 2
g<-function(x,y)y-x^2
```

```

fx<-function(x,y)-exp(-x)
fy<-function(x,y) 1
gx<-function(x,y)-2*x
gy<-function(x,y) 1

X<-c(1,2)
for(i in 1:2){
x<-X[1];y<-X[2]
J<-rbind(c(fx(x,y),fy(x,y)),c(gx(x,y),gy(x,y)))
F<-c(f(x,y),g(x,y))
X<-c(x,y)
X<-X-solve(J)%*%F
}
print(J)

##          [,1] [,2]
## [1,] -0.2497  1
## [2,] -2.7746  1

print(X)

##          [,1]
## [1,] 1.318
## [2,] 1.733

```

d. si $x^* = 1.315974$; $y^* = 1.731787$; entonces los errores seran:

La solucion a la segunda iteracion es:

$x=1.318246$; $y=1.733005$

Los errores son:

$$\varepsilon_x = | 1.318246 - 1.315974 | = 0.22e - 2$$

$$\varepsilon_y = | 1.733005 - 1.731787 | = 0.12e - 2$$

Ambas raices tiene valor de $m=0$, por lo tanto $m-n+1 = -n+1 = -2$, se concluye $n=3$. Ambas raices en la segunda iteracion tienen 3 cifras significativas.

- Indicar las condiciones para que un sistema de ecuaciones lineales tenga o no solucion en todos los casos. Poner ejemplos de 2 ecuaciones con 2 incognitas para ilustrar cada caso.

Solucion. Las condiciones corresponde a las relaciones de rangos de las matrices del sistema:

- Si el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada $A|b$, entonces el sistema tiene solucion, caso contrario no hay solucion.
- Si cumple la proposicion anterior y ademas el rango es igual al orden del sistema, entonces hay una unica solucion.

- Descomponer algebraicamente la matriz A en LU, dado por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}$$

5. Resolver le siguiente sistemas de ecuaciones $Ax=b$, dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'Ax = \begin{pmatrix} 56 & 21 \\ 21 & 44 \end{pmatrix} \quad A'b = \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}$$

La solución por procesos iterativos (converge) o proceso de transformación elementales o descomposición en LU

La solución por operaciones elementales es:

$$\begin{pmatrix} 56 & 21 & 33 \\ 21 & 44 & 27 \end{pmatrix}$$

Haciendo cero a_{21} se tiene:

$$f_2 = 21 * f_1 - 56 * f_2$$

$$\begin{pmatrix} 56 & 21 & 33 \\ 0 & -2023 & -819 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 819/2023 = 0.4048443$$

$$x_1 = (33 - 21 * 0.4048443)/56 = 0.4374691$$

```
A<-cbind(c(1,2,5,4,3,1),c(4,0,1,1,1,5))
b<-c(4,2,1,4,1,1)
AtA<-t(A)%*%A
Atb <-t(A)%*%b
print(AtA)

##      [,1] [,2]
## [1,]  56  21
## [2,]  21  44

print(Atb)

##      [,1]
## [1,]  33
## [2,]  27

solve(AtA,Atb)
```

```
##      [,1]  
## [1,] 0.4375  
## [2,] 0.4048
```

Puntaje 5,5,3,3,4