UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
DPTO. Estadística e Informática
22 de Octubre del 2013

Examen Parcial de Métodos Numéricos y Simulación

1. Probar que la función g(x)=(x + a/x)/2 es una aplicación contraída y que el punto fijo es la raíz cuadrada de "a". Pruebe para a = 2.

   Para "a" se fija el intervalo I=]1,2[

   Si g(x) es una aplicación contraída debe cumplir:

   g(1) $\in$ I : (1+2/1)/2 = 1.5; g(2) $\in$ I : (2+2/2)/2 = 1.5
   x0 = 1.5
   x1=g(x0) = (1.5+2/1.5)/2 = 1.416666666666667
   x2=g(x1) = (x1+2/x1)/2 = 1.41421568627451
   x3=g(x2) = (x2+2/x2)/2 = 1.41421356237469
   x4=g(x3) = (x3+2/x3)/2 = 1.414213562373095

   | g(x1) - g(x2) | ≤ k |x1-x2| Condición de Lipschitz

   | 2.1239e-06| ≤ k | 0.00245098|

   Satisface para k ≥ 0.0008665511 y menor de 1

   | g(x2) - g(x3) | ≤ k |x2-x3|

   | 1.59e-12| ≤ k | 2.123e-06|

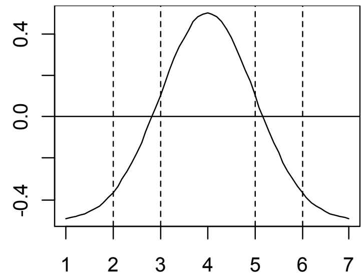
   Satisface para k ≥ 7.5 e-07y menor de 1

   Cumple la condición de Lipstchiz.

   Si x = sqrt(2) es [unto fijo, debe cumplir sqrt(2)= g(2) = (sqrt(2)+2/sqrt(2))/2

   1.414213562373095 = 1.414213562373095 Satisface.

2. Hallar la raíz de una de las ecuaciones
   a. $f(x) = e^{\frac{-(x-4)^2}{2}} - {}^{1}/_{2} = 0$; raíz menor por falsa posición
   b. $f(x) = log(2) - \frac{(x-4)^2}{2} = 0$; raíz mayor por secante



a) Raíz menor por falsa posición. X $\in$]2,3[

f(x) = exp(-(x-4)^2/2)-1/2

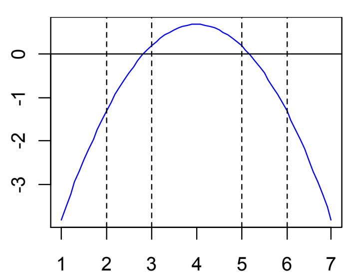
Algoritmo: d = (f(b)*a-f(a)*b)/(f(b)-f(a)) y localizar el intervalo para definir el nuevo intervalo I]a,b[

Valores iniciales a=2, b=3

Primera iteración: d = (f(3)*2-f(2)*3)/(f(3)-f(2)) = 2.77391
f(d)*f(a) =0.0103598 es positivo, entonces el nuevo intervalo es a=2.77391, b=3
Segunda iteración: d=(f(b)*a-f(a)*b)/(f(b)-f(a)) = 2.82151
f(d)*f(a) = 1.80237e-05 es positivo, entonces el nuevo intervalo es a=2.82151, b=3
Tercera iteración: d=(f(b)*a-f(a)*b)/(f(b)-f(a)) = 2.82257
f(d)*f(a) = 7.91383e-09 es positivo, entonces el nuevo intervalo es a=2.82257, b=3

Hasta la tercera iteración, la raíz aproximada es: 2.82257
El máximo error debe ser menor que el rango del nuevo intervalo = 0.17743.
Una mejor aproximación al error e mediante la aproximación de un nuevo valor, para asumir como el más exacto: d=(f(b)*a-f(a)*b)/(f(b)-f(a)) = 2.822568787
El error aproximado = |2.82257 - 2.822568787 | = 0.1213e-05, para el numero de cifras significativas exactas se asume m=0 y el error < 0.5 E(m-n+1); -n+1 = -5; n=6
Por lo tanto la aproximación a la tercera iteración tiene 6 cifras significativas exactas.

b) Raíz mayor por secante X $\in$]5,6[



La ecuación: f(x) = log(2) - (x-4)^2/2 = 0

Algoritmo: X_{i+1}=(f(X_i)*X_{i-1}-f(X_{i-1})*X_i)/(f(x_i)-f(x_{i-1}))

Valores iniciales X_{-1} =6, X_0 =5

Aplicando el algoritmo se tiene:
X1= 5.128764787
X2 = 5.181464088
X3 = 5.177324658

Para el error de esta aproximación, se determina un nuevo valor de X que será el más aproximado a X*

X* = 5.177409876

Error = |5.177324658 - 5.177409876| = 0.085218e-03.

Como m = 0, entonces m-n+1 = -3, resulta que la aproximación X3=5.177324658 tiene 4 cifras significativas exactas.

3. Al evaluar la función e^x puede aproximarse por un valor de la serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

a) El valor exacto de $e^{0.5}$ es 1.648721, cuantos términos de la serie se debe utilizar para tener 3 cifras significativas del valor de la función e^x, considerando que e^x =1 es el resultado con un primer término.

f(x) = exp(x)

Términos	f(0.5)	Error abs	Limite
1	1	0.648721	0.005
2	1.5	0.148721	0.005
3	1.625	0.023721	0.005
4	1.645833	0.002888	0.005

Con 4 términos de la serie, el valor de exp(0.5) = 1.645833 tiene un error < 0.005 por lo tanto la aproximación tiene 3 cifras significativas exactas

b) Si la ecuación es f(x) = e^x - 1.6 =0, la solución exacta es log(1.6), hallar el valor por aproximación sucesiva de la forma g(x)=x - φ(x)f(x) con 3 cifras si utiliza como valor inicial x=0.4.

El minimo error solicitado = 0.5*10^(m-n+1) = 0.5*10^(-1 -3 +1) = 0.5^10^(-3) =0.0005

φ(x) = ½

f(x) = exp(x) - 1.6

g(x) = x – ½ * exp(x) - 1.6

iteración	f(x)	Error	Limite
0	0.4		
1	0.454088	0.015915978	0.0005
2	0.46672	0.003283988	
3	0.469343	0.000661107	
4	0.469871	0.000132396	

Por lo tanto la aproximación x=0.469871 tiene 3 cifras significativas exactas

4. Resolver el sistema de ecuaciones por una triangular, utilice operaciones elementales para ello puede organizar el sistema como mejor considere. Hallar la matriz según la triangular superior.

$$2x_2 + 5x_3 = 9$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$3x_1 + x_2 = 10$$

Ordenando

$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$ $0x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 9$ $3x_1 + x_2 + 0x_3 = 10$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{r} \\ \\ 2f_3 - 3f_1 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{r} \\ \\ 2f_3 + f_2 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

El sistema se reduce a:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$0x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 9$$
$$0x_1 + 0x_2 - x_3 = -5$$

Resulta:

X3 = 5

X2 = ½ (9 – 5 X3) = (9 - 25) /2= -8

X1 = ½ (9 - X2 - X3) = (9 + 8 - 5)/2 = 6

Solución X= (6, -8, 5)

Puntaje 5 c/u