UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA - La Molina
Facultad de Economía y Planificación
Dpto. Estadística e Informática.

Examen Parcial. Métodos numéricos y simulación 27-5-13

1. Estudiar el grado de convergencia de la ecuación x^2 -6*x +9 =0, cuando se aplica el método de Newton.

   La aplicación contraída según Newton es: g(x)=x – (x^2 -6*x +9)/(2x-6)

   ```
   g(x) = x – (x-3)^2 /(2 (x-3) ) = x – (x-3)/2 = (x+3)/2
   g'(x)= ½
   Taylor: xi+1 = x* + (xi-x*) (1/2) (x*) + ..
   xi+1 – x* ≈ (xi-x*) (1/2)
   En valor absoluto: Ei+1 ≈ Ei  (1/2)
   ```

   lim Ei+1 / Ei ≈ ½ = constante
   i->∞
   El exponente de Ei es 1; por lo tanto la convergencia es lineal

2. Si se desea calcular la raíz de una función con un error absoluto de 0.05, si la raíz se encuentra en el intervalo entre 2 y 3. ¿Cuantas iteraciones debe realizar si aplica bisección?

   ```
   Si aplica bisección, el error es Ei ≈ |2-3|/2^i
   Ei = 2^(-i); pero Ei por lo menos debe ser ≤ 0.05 para
   satisfacer la condición solicitada.

   log(0.05) >=  -i *log(2)
   -4.321928 >= -i

   i >= 4.321928; Por lo tanto el número de iteraciones
   debe ser 5.
   ```

3. En el registro de notas, las notas son redondeadas hasta un decimal, ¿cuál sería el error del promedio de los datos si cada nota es superior a 10.

   Si cada nota es redondeada a un decimal,
   Entonces el error absoluto E ≤ 10^(m-n+1)

   Si la nota es mayor de 10 y menos de 20, el valor de m=1
   El número de cifras es a un decimal, entonces n = 3 (son 2 enteros y un decimal)

   Promedio = ∑ xi / n
   Error(promedio) = ∑| d (promedio) /dxi | Ei = ∑(1/n) Ei = 1/n ∑Ei

   Ei ≤ 10^(1-3+1) = 0.1

   Error(promedio) = 1/n ∑ (0.1) = 0.1

4. Realice la descomposición de A en LU y resuelva el sistema en base a las triangulares halladas.

$$2x+4y+z = 21$$
$$4x+y+2z = 21$$
$$2y+5z = 31$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$u_{1j} = a_{1j}$, $j=1,2,3$
$u_{11}=2$, $u_{12}=4$, $u_{13}=1$
$2l_{21} = 4$; $l_{21}=2$
$2*4+u_{22}=1$; $u_{22}= -7$
$2*1+u_{23}=2$; $u_{23}= 0$
$-7*l_{32}=2$; $l_{32}=-2/7$
$-2/7 * 0 + u_{33}=5$; $u_{33}=5$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/7 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El sistema Ax=b se convierte en LUx = b, es decir Ly=b

El sistema triangular inferior da como solución a Y.

$Y_1 = 21$
$2y_1 + y_2 = 21$; $y_2=-21$
$-2/7\ Y_2+ y_3 = 31$; $y_3 = 25$

El nuevo sistema seria: Ux = Y

$5\ X_3 = 25$; $x_3 = 5$
$-7\ x_2 = -21$; $x_2 = 3$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 21$; $2x_1 + 12 + 5 = 21$; $x_1=2$

$X_1=2$; $X_2=3$; $X_3=5$

5. Aplique el método de Gauss Seidel al sistema anterior de tal manera que converja a la solución del sistema de ecuaciones.

El sistema debe ser reordenado para tener una diagonal dominante:

Original:	Cambiado la primera por la segunda
2x+4y+z = 21	4x+y+2z = 21
4x+y+2z = 21	2x+4y+z = 21
2y+5z = 31	2y+5z = 31

Algoritmo de GAUSS SEIDEL

$X_{k+1} = (21- Y_k -2Z_k)/4$
$Y_{k+1} = (21- 2X_k+1 -Z_k)/4$
$Z_{k+1} = (31-2Y_k+1)/5$

K	X_k	Y_k	Z_k
0	0	0	0
1	5.250	2.625	5.150
2	2.018750	2.953125	5.018750
3	2.002344	2.994141	5.002344
4	2.000293	2.999268	5.000293
5	2.000037	2.999908	5.000037

Puntaje 4 c/u