UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
DPTO. Estadística e Informática
Métodos Numéricos y Simulación
Parcial, 23 de Octubre del 2012

1. Descomponer la matriz A en LU y resolver el sistema LU x = b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{LU = A}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l21 & 1 & 0 & 0 \\ l31 & l32 & 1 & 0 \\ l41 & \text{l42} & l43 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u12 & u13 & u14 \\ 0 & u22 & u23 & u24 \\ 0 & 0 & u33 & u34 \\ 0 & 0 & 0 & u44 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar LxU se tiene:

· $u_{11} = 1$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 0$, $u_{14} = 0$
· $l_{21} = 0$;
· $l_{21}*u_{12} + u_{22} = 2$; $u_{22} = 2$;
· $l_{21}*u_{13} + u_{23} = 2 \rightarrow u_{23} = 0$;
· $l_{21}*u_{14} + u_{24} = 2 \rightarrow u_{24} = 6$;
· $l_{31} = 0$; $l_{31}*u_{12} + l_{32}*u_{22} = 0 \rightarrow l32 = 0$
· $l_{31}*u_{13} + l_{32}*u_{23} + u_{33} = 6 \rightarrow u_{33} = 6$
· $l_{31}*u_{14} + l_{32}*u_{24} + u_{34} = 10 \rightarrow u_{34} = 10$
· $L_{41} = 0$; $l_{41}*u_{12} + l_{42}*u_{22} = 0 \rightarrow l_{42} = 3$
· $L_{41}*u_{13} + l_{42}*u_{23} + l_{43}*u_{33} = 10 \rightarrow l_{43} = 10/6$
· $L_{41}*u_{14} + l_{42}*u24 + l_{43}*u_{34} + u_{44} = 12 \rightarrow l_{43} = 10/6$
· $u_{44} = 12 - 100/6 - 18 = -68/3$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 10/6 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -68/3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo Ly =b, donde y=Ux. Incógnita "y"
El sistema es una triangular inferior, entonces:

$y_1 + 0 + 0 + 0 = 4$; $y_1 = 4$
$0 + y_2 + 0 + 0 = 8$; $y_2 = 8$
$0 + 0 + y_3 + 0 = 4$; $y_3 = 4$
$0+3(8) + 10(4)/3 + y_4 = 8$; $y_4 = 8-24-40/3 = -88/3$

Resolviendo Ux =y
El sistema es una triangular superior, entonces:

$0+0+0+-68/3\ x_4 = -68/3$; $x_4 = 1$
$0+0+6\ x_3 + 10\ x_4 = 4$; $x_3 = -1$
$0+2\ x_2 + 0 + 6\ x_4 = 8$; $x_2 = 1$

$x_1 + 0 + 0 + 0 = 4;\ x_1=4$

Sol: x= (4, -1, 1, 1)

2. Hallar el grado de convergencia del método de Newton al hallar la solución de la ecuación $(x-2)^2 = 0$.

   Sol: Método de Newton: $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$
   $f(x_i) = (x_i-2)^2$
   $f'(x_i) = 2\ (x_i-2)$

   Remplazando: $x_{i+1}=x_i-(x_i-2)^2(/2(x_i-2))=x_i-(x_i-2)/2 = x_i/2 +1$

   Según el algoritmo
   La función contraída $g(x) = x/2 +1$
   $g(x_i) = g(x^*) + (x_i-x^*)\ g'(x^*) + (x_i-x^*)\ g''(x^*)/2! + ...$

   En el desarrollo de Taylor se requiere las derivadas:

   $x_{i+1} = g(x_i)$
   $x^* = g(x^*)$
   $g'(x) = ½ \to g'(x^*) = 1/2$
   $g''(x) = 0 \to g''(x^*) = 0$

   $x_{i+1} = x^* + (x_i-x^*)\ 1/2 + 0$

   $|x_{i+1} - x^*| / |x_i - x^*| = 1/2$; Es equivalente a: $E_{i+1} / E_i = 1/2$

   $\lim_{i\to\infty} E_{i+1} / E^r_i = 1/2$ para r=1, por lo tanto La convergencia es lineal.

3. Utilice operaciones elementales para resolver el sistema Ax=b planteada en la pregunta 1. Debe mostrar todos los pasos que realiza en la conversión ya sea en convertir en diagonal o triangular superior o inferior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 6 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ f4 - 3 f2 resulta } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & -6 & -16 \end{pmatrix}$$

f4 – 10/6 f3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -136/6 & -136/6 \end{pmatrix}$$

Se tiene una triangular superior $x_4= (-136/6) / (-136/6) = 1$ $x_3 = (4-10)/6 = -1$ $x_2 = (8-6)/2 = 1$ $x_1 = 4$

La raíz exacta de una ecuación no lineal es 2, se utilizara el método de bisección para llegar a la raíz con 4 cifras decimales significativas. Si el intervalo de inicio es (1.8, 2.4). ¿Cuántas iteraciones debe realizar para llegar a esta aproximación? Asuma el valor de x* = 2.

En bisección, el error absoluto es menor o igual a la mitad del intervalo que encierra la raíz.
$E_1 = |a-b|/2$, $E_i = |a-b|2^i$; i = numero de iteraciones.
Como la raíz esta entre 1.8 y 24, m= 0, y 4 cifras decimales significativas, n=4, entonces el máximo error requerido es $0.5x10^{m-n+1} = 0.0005$
Entonces:
$|1.8-2.4|/2^i <= 0.0005$
$2^i >= 1200$
i log2 >= log(1200)
i >= 10.22; # iteraciones =11

4. Halle un algoritmo de aproximación sucesiva diferente a Newton que converja a la raíz de la ecuación $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$ en el intervalo (1, 1.5)

I=] 1, 1.5 [

$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$

Algoritmo 1:

$x = \sqrt{2 - e^{-x}}$. Entonces $g(x) = \sqrt{2 - e^{-x}}$
El algoritmo: $x_{i+1} = \sqrt{2 - e^{-x_i}}$
$x_0 = 1.25$
$x_1 = g(x_0) = 1.309005425$;
$x_2 = g(x_1) = 1.315260983$
$x_3 = g(x_2) = 1.315901111$
$x_4 = g(x_3) = 1.315966372$

Condición de Lipschitz :
$| g(x_0) - g(x_1) | = 0.006255558008 <= k | x_0 - x_1| = 0.05900542518$ k Para $0.106 \leq k \leq 1$
$| g(x_1) - g(x_2) | = 0.000640128 <= k | x_1 - x_2| = 0.006255558008$ k Para $0.102 \leq k \leq 1$
$| g(x_2) - g(x_3) | = 6.526094367e-05 <= k | x_2 - x_3| = 0.000640128$ k Para $0.1019 \leq k \leq 1$

Satisface la condición de Lipschitz y también es $g(x) \in I$ entonces es una aplicación contraída y el algoritmo converge.

Algoritmo 2:
$g(x) = -\log(2-x^2)$
x0 = 1.25; x1 = 0.8266785732
$| g(x_0) - g(x_1) | = 1.1017331559 <= k | x_0 - x_1| = 1.1017331559$ k Para $k > 2.6$
No satisface, no es aplicación contraída.

Algoritmo 3: $x_{i+1} = \frac{2-e^{-x_i}}{x_i}$; Es aplicación contraída y converge a la raíz: 1.315973778

Puntaje 4 c/u