

Solucionario examen Parcial de Métodos numéricos y simulación
(Octubre – 2010)

1. El valor de π en su máxima expresión verdadera en los sistemas de cómputo es **3.141592653589793**. Expresa el valor en aproximaciones, en la cual cada uno tenga un número mínimo de cifras, en donde:

- a) El error absoluto sea menor de 0.01

$$\begin{aligned} \pi - 0.01 &= 3.131592653589793 \\ \pi + 0.01 &= 3.151592653589793 \\ \text{Un número entre este intervalo es: } &3.14 \\ \text{abs}(\pi - 3.14) &= 0.0015\dots < 0.01 \\ \text{Rep. } \pi &= 3.14 \end{aligned}$$

- b) Este redondeado a 2 cifras.

$$\begin{aligned} \text{el error debe ser menor de } &10^{-(2-1)} = 0.1 \\ \pi - 0.1 &= 3.041592653589793 \\ \pi + 0.1 &= 3.241592653589793 \\ \text{Un número entre este intervalo es: } &3.1 \\ \text{abs}(\pi - 3.1) &= 0.04\dots < 0.1 \\ \text{Rep. } \pi &= 3.1 \end{aligned}$$

- c) Tenga 3 cifras significativas exactas.

$$\begin{aligned} \text{el error debe ser menor de } &0.5 \cdot 10^{-(3-1)} = 0.005 \\ \pi - 0.005 &= 3.136592653589793 \\ \pi + 0.005 &= 3.146592653589793 \\ \text{Un número entre este intervalo es: } &3.14 \\ \text{abs}(\pi - 3.14) &= 0.001592654\dots < 0.005 \\ \text{Rep. } \pi &= 3.14 \end{aligned}$$

- d) El margen de error sea menor del 1%.

$$\begin{aligned} \text{Error relativo} \cdot 100 &< 1\%, \text{ entonces el error relativo} < 0.01 \\ \text{el error absoluto debe ser menor de } &0.01 \cdot \pi = \mathbf{0.03141592653589793} \\ \pi - 0.03141592653589793 &= 3.110176727053895 \\ \pi + 0.03141592653589793 &= 3.17300858012569 \\ \text{Un número entre este intervalo es: } &3.12, 3.13, 3.14, 3.15 \text{ o } 3.16 \\ \text{abs}(\pi - 3.12) &= 0.02\dots < 0.03 \dots \\ \text{abs}(\pi - 3.13) &= 0.01 \dots < 0.03 \dots \\ \text{abs}(\pi - 3.14) &= 0.001 \dots < 0.03 \dots \\ \text{abs}(\pi - 3.15) &= 0.008 \dots < 0.03 \dots \\ \text{abs}(\pi - 3.16) &= 0.01 \dots < 0.03 \dots \\ \text{Rep. } \pi &= 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 \text{ o } 3.16 \end{aligned}$$

2. Muestre como se propaga un error constante en cada una de las 4 operaciones elementales de dos valores \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 :

Cuatro operaciones:

$$y_1 = a_1 + a_2$$

$$y_2 = a_1 - a_2$$

$$y_3 = a_1 * a_2$$

$$y_4 = a_1 / a_2$$

error constante = e

a) Error absoluto

$$e_1 = e + e = 2e$$

$$e_2 = e + e = 2e$$

$$e_3 = |a_2|e + |a_1|e = (|a_2| + |a_1|) e$$

$$e_4 = e/|a_2| + |a_1/a_2^2|e = (1/|a_2| + |a_1/a_2^2|) e$$

b) Error relativo = error absoluto / |yi|

$$\delta_1 = 2e/|a_1+a_2|$$

$$\delta_2 = 2e/|a_1-a_2|$$

$$\delta_3 = (|a_2| + |a_1|) e / |a_1 * a_2| = (1/|a_1| + 1/|a_2|) e$$

$$\delta_4 = (1/|a_2| + |a_1/a_2^2|) e / |a_1/a_2| = (1/|a_1| + 1/|a_2|) e$$

3. El siguiente polinomio $\mathbf{x^3 - 2x + 4}$ tiene una solución cercana a cero. Ilustre el proceso para determinar el grado de convergencia al aplicar el método de Newton.

$$f : x^3 - 2x + 4 = 0$$

$$f' : 3x^2 - 2$$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i) \quad (\text{Newton})$$

La aplicación contraída:

$$g(x) = x - f/f'$$

$$g : x - (x^3 - 2x + 4)/(3x^2 - 2)$$

$$g : (2x^3 - 4)/(3x^2 - 2)$$

Evaluando la primera derivada

$$g' : [(3x^2 - 2)(6x^2) - (2x^3 - 4)(6x)] / (3x^2 - 2)^2$$

$$g' : (6x)[x^3 - 2x + 4] / (3x^2 - 2)^2$$

$$g' : (6x)[0] / (3x^2 - 2)^2 = 0 \quad \{ \text{Según la ecuación planteada} \}$$

Evaluando la segunda derivada

$$g'' : [6x^4 - 12x^2 + 24x] / (3x^2 - 2)^2$$

$$g'' : \{(3x^2 - 2)^2[24x^3 - 24x + 24] - [6x^4 - 12x^2 + 24x](2(3x^2 - 2)(6x))\} / (3x^2 - 2)^4$$

$$g'' : \{24(3x^2 - 2)^2[x^3 - x + 1] - (6x)[x^3 - 2x + 4](2(3x^2 - 2)(6x))\} / (3x^2 - 2)^4$$

$$g'' : \{24(3x^2 - 2)^2[x^3 - x + 1] - (6x)[0](2(3x^2 - 2)(6x))\} / (3x^2 - 2)^4$$

$$g'' : 24(3x^2 - 2)^2[x^3 - x + 1] / (3x^2 - 2)^4 = 24(x^3 - x + 1) / (3x^2 - 2)^2$$

dado que $x^3 - 2x + 4 = 0$; $x^3 - x + 1 = x - 3$

$$g'' : 24(x-3) / (3x^2 - 2)^2 \neq 0$$

Expandiendo en la serie de Taylor alrededor de x^* para el valor x_i

$$g(x_i) = g(x^*) + (x_i - x^*) g'(x^*) + (x_i - x^*)^2 g''(x^*) / 2! + \dots$$

$$x_{i+1} = x^* + (x_i - x^*) (0) + (x_i - x^*)^2 g''(x^*) / 2!$$

$$x_{i+1} - x^* \approx (x_i - x^*)^2 g''(x) / 2!$$

En valor absolute, aplicando limites:

$$|x_{i+1} - x^*| \approx (x_i - x^*)^2 g''(x^*) / 2!$$

$$\lim E_{i+1} / E_i^2 = g''(x^*) / 2! \text{ La convergencia es de orden } 2$$

4. Dado el sistema $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 14 \\ 36 \\ 98 \end{pmatrix}$$

a) Resolver mediante operaciones elementales descomponiendo el sistema en una triangular inferior.

1	<table border="1"> <tbody> <tr><td>f1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>14</td></tr> <tr><td>f2</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>36</td></tr> <tr><td>f3</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>98</td></tr> </tbody> </table>	f1	1	2	3	14	f2	1	4	9	36	f3	1	8	27	98	2	<table border="1"> <tbody> <tr><td>27f1-3f3</td><td>24</td><td>30</td><td>0</td><td>84</td></tr> <tr><td>27f2-9f3</td><td>18</td><td>36</td><td>0</td><td>90</td></tr> <tr><td>f3</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>98</td></tr> </tbody> </table>	27f1-3f3	24	30	0	84	27f2-9f3	18	36	0	90	f3	1	8	27	98
f1	1	2	3	14																													
f2	1	4	9	36																													
f3	1	8	27	98																													
27f1-3f3	24	30	0	84																													
27f2-9f3	18	36	0	90																													
f3	1	8	27	98																													
3	<table border="1"> <tbody> <tr><td>36f1-30f2</td><td>324</td><td>0</td><td>0</td><td>324</td></tr> <tr><td>f2</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>f3</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>98</td></tr> </tbody> </table>	36f1-30f2	324	0	0	324	f2	2	4	0	10	f3	1	8	27	98	4	<table border="1"> <tbody> <tr><td>f1/324</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>f2</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>10</td></tr> <tr><td>f3</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>98</td></tr> </tbody> </table>	f1/324	1	0	0	1	f2	2	4	0	10	f3	1	8	27	98
36f1-30f2	324	0	0	324																													
f2	2	4	0	10																													
f3	1	8	27	98																													
f1/324	1	0	0	1																													
f2	2	4	0	10																													
f3	1	8	27	98																													

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 98 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = (10 - 2 X_1) / 4 = 2$$

$$X_3 = (98 - X_1 - 8 X_2) / 27 = (98 - 1 - 16) / 27 = 3$$

- b) Al resolver el sistema $Ax=b$, por el método de Gauss-Sidel, la convergencia es muy lenta y con Jacobi no converge, sin embargo, conociendo la secuencia de Gauss-Seidel, el sistema puede ser re-escrito y la convergencia sería más rápida. Re-escriba el mejor sistema.

$$\begin{aligned} 27x_3 + 8x_2 + x_1 &= 98 \\ 9x_3 + 4x_2 + x_1 &= 36 \\ 3x_3 + 2x_2 + x_1 &= 14 \end{aligned}$$

Valor inicial $x_1=0, x_2=0, x_3=0$

En 15 iter.: $x_3 = 3.02 \quad x_2 = 1.90 \quad x_1 = 1.10$

En 50 iter.: $x_3 = 3.000095 \quad x_2 = 1.999685 \quad x_1 = 1.000345$

```
A<-rbind(c(27,8,1) ,c(9,4,1),c(3,2,1))
b<-c(98,36,14)
x<-rep(0,3)
for (i in 1:15){
x[1] <- (b[1] - A[1,2]*x[2] - A[1,3]*x[3])/A[1,1]
x[2] <- (b[2] - A[2,1]*x[1] - A[2,3]*x[3])/A[2,2]
x[3] <- (b[3] - A[3,1]*x[1] - A[3,2]*x[2])/A[3,3]
print(x)
}
```

El proceso original:

15 iter.: $X_1 = 0.069 \quad x_2 = 2.629 \quad x_3 = 2.848$

50 iter.: $X_1 = 0.977 \quad x_2 = 2.015 \quad x_3 = 2.996$

```
A<-rbind(c(1,2,3) ,c(1,4,9),c(1,8,27))
b<-c(14,36,98)
x<-rep(0,3)
for (i in 1:15){
x[1] <- (b[1] - A[1,2]*x[2] - A[1,3]*x[3])/A[1,1]
x[2] <- (b[2] - A[2,1]*x[1] - A[2,3]*x[3])/A[2,2]
x[3] <- (b[3] - A[3,1]*x[1] - A[3,2]*x[2])/A[3,3]
print(x)
}
```

Puntaje: 4, 5, 5, y 6 respectivamente