UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
Dpto. Estadística e Informática
Métodos Numéricos y Simulación
Examen Parcial – Octubre 2009 (Puntaje 6, 6, 6, 2)

1. La siguiente muestra corresponde a las medidas de la altura del Yacon. Cada registro tiene un margen de error menor del 2%. Se debe calcular algunas estadísticas como la mediana medida central y el rango como medida de variación. Hallar sus valores si la muestra es: 2.65, 2.61, 2.65, 2.90, 2.50 y 2.48 metros.

   Sol: altura ordenada: 2.48, 2.50, 2.61, 2.65, 2.65, 2.90
   Error alturas: 0.0496, 0.05, 0.0522, 0.053, 0.053, 0.058
   Mediana = (2.61 + 2.65)/2 = 2.63
   Rango = 2.90 – 2.48 = 0.0526
   Error(mediana) = ½ (0.0522) + ½ (0.053) = 0.0526
   Error(rango) = 1 (0.058) + 1 (0.0496) = 0.1076

   Mediana = 2.63 ± 0.0526
   Rango = 0.0526 ± 0.1076, como debe ser positivo, su menor valor será 0.

2. Resolver la ecuación $x\ e^{x} - 2 = 0$ por aproximación sucesiva, verificar la convergencia, previamente localice la raíz que es única.

   Sol.
   Buscando la convergencia. Una inspección grafica, x Є I =] 0.5, 1 [
   Algoritmo: x = g(x)
   Alternativas: $x_{i+1} = 2/ e^{xi}$

   Punto inicial : x0 = 0.75 como punto medio en I
   x1 = g(x0) = 0.9447331 Є I
   x2 = g(x1) = 0.7775666 Є I
   x3 = g(x2) = 0.9190457 Є I

   | g(x1)-g(x0)| < k |x1-x0| → | 0.7775666 - 0.9447331 | < k | 0.9447331 - 0.75|
   0.1671665 < k 0.1947331, satisface para k > 0.858439

   | g(x2)-g(x1)| < k |x2-x1| → | 0.9190457 - 0.7775666 | < k | 0.7775666 - 0.9447331 |
   0.1414790 < k 0.1671665, satisface para k > 0.8463358

   Satisface la condicion de convergencia.

a) Halle la raíz utilizando tres iteraciones

iter	xi	ei
0	0.75	
1	0.944733	0.194733
2	0.777567	0.167167
3	0.919046	0.141479

b) Encuentre la raíz con 1 cifra decimal significativa exacta.

Con 1 cifra, el error debe ser menor a 0.05, porque m = -1; m-n+1 = -1

Hasta la tercera iteración, el error es 0.141479

Continuando el proceso iterativo.

En la iteración 10 se tiene:

iter	xi	ei
10	0.831376	0.046445

c) Encuentre la raíz con un margen de error menor al 5%

significa un error relativo < 0.05

iter	xi	realtivo
10	0.831376	0.05291
11	0.8709	0.047541

3. Se tiene información de una variable dependiente "y" y tres variables independientes (x1, x2, y x3). La matriz de correlaciones de x1, x2 y x3, constituyen los coeficientes de un sistema de ecuaciones, el lado derecho del sistema corresponde a las correlaciones de las Variables x1, x2 y x3 con la variable dependiente "y". La solución corresponde a los efectos directos de cada variable sobre la dependiente. (Se conoce como análisis de secuencias en modelo de ecuaciones estructurales del análisis multivarial)

Y	X1	x2	x3
5	4	2	1
3	2	1	2
2	2	5	3
1	1	3	4

La matriz de correlaciones es simétrica.
cor(a,b) = sp(ab)/raiz cuadrada(sc(a)*sc(b))
sp: suma de productos corregido
sc: suma de cuadrados corregido

Las correlaciones son: (x1,x2) = -0.27, (x2,x3)=0.53, (x1,x3)=-0.92, (Y,x1)=0.97, (Y,x2)=-0.49, (Y,x3)=-0.98.

a) ¿Que puede decir de la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss Seidel en el problema propuesto?

b) Realice 3 iteraciones con Gauss Seidel, e indique ¿Cuál es el mayor error de aproximación ?.

Sol.

El sistema de ecuaciones Ax = b planteado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.27 & -0.92 \\ -0.27 & 1 & 0.53 \\ -0.92 & 0.53 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97 \\ -0.49 \\ -0.98 \end{pmatrix}$$

Mediante Jacobi:

$X_1^{(k+1)} = 0.97 + 0.27\ X_2^{(k)} + 0.92\ X_3^{(k)}$
$X_2^{(k+1)} = -0.49 + 0.27\ X_1^{(k)} - 0.53\ X_3^{(k)}$
$X_3^{(k+1)} = -0.98 + 0.92\ X_1^{(k)} - 0.53\ X_2^{(k)}$

iter	x1	x2	x3	e1	e2	e3
1	0.97	-0.49	-0.98	0.97	0.49	0.98
2	-0.0639	0.2913	0.1721	1.0339	0.7813	1.1521
3	1.206983	-0.59847	-1.19318	1.270883	0.889766	1.365277
4	-0.28931	0.468269	0.447611	1.496292	1.066735	1.640788
5	1.508235	-0.80535	-1.49435	1.797544	1.273617	1.941958
6	-0.62224	0.709227	0.83441	2.130478	1.514575	2.328757

En Jacobi, los errores tienden a aumentar en cada iteración, no se produce convergencia.

Gauss-Seidel:

$X_1^{(k+1)} = 0.97 + 0.27\ X_2^{(k)} + 0.92\ X_3^{(k)}$
$X_2^{(k+1)} = -0.49 + 0.27\ X_1^{(k)} - 0.53\ X_3^{(k+1)}$
$X_3^{(k+1)} = -0.98 + 0.92\ X_1^{(k+1)} - 0.53\ X_2^{(k+1)}$

iter	x1	x2	x3	e1	e2	e3
1	0.97	-0.2281	0.033293	0.97	0.2281	0.033293
2	0.939043	-0.2541	0.018594	0.030957	0.026004	0.014699
3	0.918499	-0.25186	-0.0015	0.020544	0.002244	0.020089
4	0.900622	-0.24604	-0.02103	0.017877	0.005821	0.019531
5	0.884225	-0.24012	-0.03925	0.016397	0.005924	0.018225
6	0.869057	-0.23455	-0.05616	0.015168	0.005564	0.016903

Los errores disminuyen en cada iteración, hay convergencia. Para la tercera iteración se tiene: x1=0.918499, x2=-0.25186 x3=-0.0015 y el error mas grande es 0.020544.

4. Hallar la raíz característica mas grande de la matriz de correlación (x1,x2,x3) por el método directo, con dos iteraciones y halle otra aproximación mediante el cociente de Rayleigh.

   El sistema a resolver es Ax=λx, donde λ es el valor propio, x su vector asociado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.27 & -0.92 \\ -0.27 & 1 & 0.53 \\ -0.92 & 0.53 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

K	Xk	Axk	r
0	1	1	
	0	-0.27	
	0	-0.92	1
1	1	1.9193	
	-0.27	-1.0276	
	-0.92	-1.9831	1.9193
2	1	2.095141	
	-0.5354	-1.35302	
	-1.03324	-2.23701	2.095141
3	1		
	-0.64579		
	-1.06771		

Hasta la segunda iteración, el valor de λmax = 2.095141 y
su vector asociado X=(1, -0.64579, -1.06771)

Mediante Rayleigh el valor de λ es:

X'AX / X'X

Con el vector asociado X, se tiene:

5.601255 / 2.557052 = 2.190513. (el verdadero valor es 2.19208898)

En el proceso iterativo, los errores en la segunda iteración fueron:

Error (λ) = abs(2.095141 - 1.9193) = 0.175841

Para el cociente de rayleigh (valor de λ mejorado)

X=(1, -0.64579, -1.06771), y sus errores E=(0, 0.110386417, 0.03446967)

Error en X'AX:
abs($(2x_1 + 2(-0.27)x_2 + 2(-0.92)x_3)$) E_1 +
abs($(2x_2 + 2(-0.27)x_1 + 2(0.53)x_3)$) E_2 +

abs($(2x_3 + 2(-0.92)x_1 + 2(0.53)x_2)$) E_3 = 0.4877413

Error en X'X:
abs($2x_1$) E_1 + abs($2x_2$)E_2 + abs($2x_3$) E_3 = 0.2161802

para el cociente:

X'AX / X'X = 5.601255 / 2.557052 = 2.190513

El error es:

abs(1/2.557052) 0.4877413+ abs(-5.601255 / 2.557052^2) 0.2161802 = 0.3759356

El valor correcto λmax = 2.19208898.
Los errores correspondientes son:

r: abs(2.095141 - 2.19208898) = 0.09694798
λ Rayleigh: abs(2.190513 - 2.19208898) = 0.00157598

Con el cociente de Rayleigh el error es mucho menor.

Se puede apreciar que las aproximaciones a los errores no son muy buenas en las primearas iteraciones cuando se utiliza la diferencia de las aproximaciones