UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
DPTO. Estadística e Informática
Métodos Numéricos y Simulación
Examen Parcial, 19 de Febrero del 2008

1. Si los pesos en el rango de 10 a 90 kilos de tubérculos cosechado en cada parcela de 8 m² del campo están redondeados a 3 cifras. ¿Cuál es el error absoluto de los pesos cuando se expresa en toneladas por hectárea?. (1 ton = 1000 kilos y 1 ha = 10,000 m²)

   Sol:
   $E_x = 10^{m-n+1}$ m=1, n=3, E_x=0.1, x=kilos en 8m², y=1.25 x toneladas en una hectárea
   E_y= |dy/dx| E_x = 1.25 (0.1) =0.125

2. Una muestra de los pesos de la pregunta anterior es: 20.3, 29.8, 14.3, 16 y 13.2 ¿Cuál es el error absoluto de la desviación media respecto a la mediana?

   Sol: La desviacion media es el promedio de las desviaciones absolutas de los datos respecto a la mediana. La mediana es 16, el error absoluto de la diferencia de dos números es la suma de los dos errores, asi si: y = | a-b| ;
   dy/da = ?
   $|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geq b \\ -a+b, & a < b \end{cases}$; entonces dy/da = +1 o –1, en valor absoluto es +1
   dy/db = ?
   $|a-b| = \begin{cases} a-b, & b \leq a \\ -a+b, & b > a \end{cases}$; entonces dy/db = -1 o +1, en valor absoluto es +1

   Ey = |dy/da| Ea + |dy/db|Eb = Ea+Eb. En este caso, el error absoluto de cada elemento de la suma de las 5 diferencias es Ex=0.1. Como la desviación media es el promedio de estas diferencia, entonces:

   Error absoluto de la desviación media = 5(2)(0.1)/5 = 0.2

3. En la solución de la ecuación $x^3 - 2x+10 =0$ en el intervalo [-3,-1] ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener la solución por bisección con 5 % de margen de error?.

   Sol: el margen de error = 5%, el error relativo es 0.05
   $Ei \leq |-1+3| /2^i \leq 0.05$, resulta $i \geq 5.32$, es decir numero de iteraciones = 6

4. Plantear el algoritmo x_{i+1} , y_{i+1} en función de x_i e y_i para resolver el sistema de ecuaciones y=tg(x) , x=exp(-y) mediante el método de newton. Sugerencia:

Puede presentar en forma matricial, indicando separadamente las componentes de las matrices que conforma el algoritmo con los indices respectivos.

Sol: por newton es: $X_{i+1} = X_i - J_i^{-1} F_i$
Donde J^{-1} es la inversa del jacobiano.

$$J_i = \begin{bmatrix} 1 & e^{-y_i} \\ \dfrac{-1}{\cos(x_i)^2} & 1 \end{bmatrix}; \quad J_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-y_i} \\ \dfrac{1}{\cos(x_i)^2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \dfrac{e^{-y_i}}{\cos(x_i)^2}}$$

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}; \quad F_i = \begin{bmatrix} x_i - e^{-y_i} \\ y_i - tg(x_i) \end{bmatrix}$$

5. Se tiene un sistema sobre determinado:
   $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_2 - x_1 = 1,\ x_3 - x_2 = 2,\ x_3 - x_1 = 1$
   Hallar la solución del sistema por Gauss-Seidel con 5 iteraciones, valor inicial es $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Hallar el margen de error más grande.

   Sol: Sistema sobredeterminado: AX = b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad A'A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A'b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$X_{1,i+1} = (-1 + X_{2,i} + X_{3,i})/3$
$X_{2,i+1} = (1 + X_{1,i+1} + X_{3,i})/3$
$X_{3,i+1} = (6 + X_{1,i+1} + X_{2,i+1})/3$

iteracion	x1	x2	x3
0	0	0	0
1	-0.33333	0.222222	1.962963
2	0.395062	1.119342	2.504801
3	0.874714	1.459838	2.778184
4	1.079341	1.619175	2.899505
5	1.172893	1.6908	2.954564

Error relalivo	0.079762	0.042361	0.018635

El margen de error mas grande es 8% (0.079)

6. Si la ecuación a resolver por newton es: $x^2 -6x + 9 = 0$, Hallar el grado de convergencia del método.

   Sol: $x_{i+1} = x_i - f_i / f'_i$
   $f(x) = x^2 -6x + 9$
   $f'(x)=2x -6$
   $g(x) = x - (x^2 -6x + 9) / (2x -6) = (x+3)/2$;
   $g'(x)= 1/2$
   Aplicando la serie de Taylor a la función g(x) y evaluando en el punto fijo para un xi alrededor del punto fijo x*

   $g(x_i) = g(x^*) + (x_i-x^*)g'(x^*)$, dado que $g'(x)=1/2$ se restringe la sumatoria.
   Entonces:
   $x_{i+1} = x^* + (x_i-x^*)\ 1/2$

   $(x_{i+1} - x^*)/(x_i-x^*) = 1/2$

   Las discrepancias absolutas de xi respecto de x* son los errores absolutos

   $\lim_{i \to \infty} E_{i+1}/E_i = 1/2$

   La convergencia es lineal

7. De una matriz de covariancia 2x2: fila1 (3,1) y fila2 (1,3). Hallar el polinomio característico y mediante aproximación sucesiva hallar el máximo y mínimo valor característico con 5 iteraciones. Comprobar el resultado con Rayleigh mediante iteración directa e inversa con 3 iteraciones.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; Polinomio característico: $P(\lambda)=\lambda^2 -6\lambda +8$

Se pueden plantear dos algoritmos despejando λ:

a) $\lambda=(\lambda^2 +8)/6$; b) $\lambda=\text{sqrt}(6\lambda -8)$

Con valores iniciales 1 y 3 se puede aproximar a las dos raíces respectivamente para cada algoritmo: a la quinta iteración se obtiene: 1.92 y 3.65

Por el proceso directo: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vector inicial

$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, λ=3, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} 3.3333 \\ 2 \end{bmatrix}$, λ=3.3333, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 2.8 \end{bmatrix}$, λ=3.6, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.77 \end{bmatrix}$

Aplicando Rayleight:

x'Ax / x'x = 3.96

De igual forma para el caso inverso.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{8}$; $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vector inicial

$Ax = \begin{bmatrix} -0.125 \\ 0.375 \end{bmatrix}$, λ=0.375, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.4166 \end{bmatrix}$, λ=0.4166, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = \begin{bmatrix} -0.35 \\ 0.45 \end{bmatrix}$, λ=0.45, asociado al vector $x = \begin{bmatrix} -0.7778 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aplicando Rayleight:

x'Ax / x'x = 2.03

comparando

mínimos: 1.92 ~ 2.03
máximos: 3.65 ~ 3.96

Son valores aproximados.

8. Si la matriz de rotación plana esta dada por:
$P = \begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix}$, Donde s= seno(θ) y c=coseno(θ), hallar el ángulo θ de rotación para diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ simétrica. Aplicar la solución a la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y hallar el ángulo en grados.

$$\begin{bmatrix} s & -c \\ c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}s - a_{21}c & a_{12}s - a_{22}c \\ a_{11}c + a_{21}s & a_{12}c + a_{22}s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix}$$

El elemento (1,2) debe ser cero.

$a_{11}sc - a_{21}c^2 + a_{12}s^2 - a_{22}sc = (a_{11}-a_{22})sc - (c^2-s^2)\ a_{12} = 0$
como $sc = ½\ sen(2\theta)$ y $c^2-s^2 = \cos(2\theta)$
entonces $tg(2\theta) = 2\ a_{12}/(a_{11}-a_{22})$

Asi $\theta = ½\ arc\ tg\ (2*a_{12}/(a_{11}-a_{22}))$

Aplicando al problema:

θ= ½ arc tg (2/(3-5)) = 0.5 (-0.785398) = -0.3926991
En ángulos: -0.3926991*180/3.14159 = - 22.5

Equivalente a 360 – 22.5 = 337.5 grados

Puntaje 2,2,2,2,3,3,3,3