Universidad Nacional Agraria La-Molina
Dpto. Estadística e Informática

Examen final de Métodos Numérico y Simulación
(20 Diciembre 2010)

1. Según la matriz variancia-covariancia del pH del suelo y su conductividad eléctrica, se tiene: var(pH) = 2.81, var(CE) = 3.99 y la covariancia 1.83. Si se desea determinar dos vectores linealmente independientes, que ángulo de rotación se requiere y cuales son esos vectores.

   La matriz correspondiente es:

   $$A = \begin{pmatrix} 2.81 & 1.83 \\ 1.83 & 3.99 \end{pmatrix}; \text{ la matriz de rotación: } P = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

   `ángulo = 0.5*atan(2*1.83/(2.81-3.99)) = -0.6294569 en radianes`

   convirtiendo a grados: `-0.6294569 *180/3.1415 = -36.06`

   Como es negativo, 0° = 360°, entonces: 360 - 36.06 = 323.94 `--->` 323.94°

   cos(-0.6294) = 0.8083; seno(-0.6294) = -0.5886

   Según P

   $$P = \begin{pmatrix} 0.8083 & 0.5886 \\ -0.5886 & 0.8083 \end{pmatrix}; \text{ , los vectores son: } V1 = \begin{pmatrix} 0.8083 \\ -0.5886 \end{pmatrix}; V2 = \begin{pmatrix} 0.5886 \\ 0.8083 \end{pmatrix}$$

2. Utilice la siguiente tabla de datos:

X1	-0.5	1	1.5	2
X2	-2	1	1.8	2.4

   Para hallar el valor de X1 cuando X2= 1.2, indique que método de interpolación de segundo orden debe utilizar y cual es el valor.

   Como X1 esta en función de X2, los espaciamientos son diferentes y el método es diferencias divididas.

   Como el valor a interpolar esta después de X2 = 1, entonces la tabla a utilizar seria:

X2	X1	{xi,xi+1}	{xi,xi+1,xi+2}
1	1		
1.8	1.5	0.625	
2.4	2	0.83333	0.14881

   `X1( 1.2) =1+0.625*(1.2-1)+0.14881*(1.2-1)*(1.2-1.8) = 1.1071428`

3. Resolver la ecuación diferencial

   $Y' = 1 - x/y \quad y(0.5) = 1$ y $h = 0.1$

   Para y(0.6) por Taylor de orden 3:

   Taylor k=3:

   $Y_{i+1} = Y_i + h\, Y'_i + h^2/2\, Y''_i + h^3/6\, Y'''_i$

   $Y'_i = 1 - X_i/Y_i$

   $Y''_i = -1/Y_i + (X_i/Y^2_i)Y'_i = -1/Y_i + X_i/Y^2_i - X^2_i/Y^3_i$

   $Y'''_i = 2/Y^2_i - 5X_i/Y^3_i + 5X^2_i/Y^4_i - 3X^3_i/Y^5_i$

   Entonces:

   $$Y_{i+1} = Y_i + 0.1(1 - X_i/Y_i) + 0.005\,(-1/Y_i + X_i/Y^2_i - X^2_i/Y^3_i) + \\ + 0.00016\,(2/Y^2_i - 5X_i/Y^3_i + 5X^2_i/Y^4_i - 3X^3_i/Y^5_i)$$

   $Y(0.6) = 1 + 0.1*(0.5) + 0.005*(-0.75) + 0.00016*(0.375) = 1.04631$

4. Un famoso experimento de física llevado a cabo por Thomson para determinar la proporción de carga respecto a la masa "m" para un electrón, usa las ecuaciones diferenciales:

   $$m\frac{d^2x}{dt^2} + He\frac{dy}{dt} = Ee$$
   $$m\frac{d^2y}{dt^2} - He\frac{dx}{dt} = 0$$

   a) Transformar en un sistema equivalente de primer orden.

      Sistema planteado:

      $m\,X'' + He\,Y' = Ee \; \text{---->} \; X'' = (Ee - He\,Y')/m$
      $m\,Y'' - He\,X' = 0 \; \text{---->} \; Y'' = He\,X'/m$

Cambio de variables:		Condiciones iniciales:
$Z_1 = X$	$Z_1' = Z2$	$Z_1 = X(t_0)$
$Z_2 = X'$	$Z_2' = (Ee - He\,Z4) / m$	$Z_2 = X'(t_0)$
$Z_3 = Y$	$Z_3' = Z4$	$Z_3 = Y(t_0)$
$Z_4 = Y'$	$Z_4' = He\,Z2 / m$	$Z_4 = Y'(t_0)$

   b) Resolver para t=1 cuando H=1/4, e=4, m=1, E=2 con las condiciones iniciales x(0)=y(0)=0, x'(0)=y'(0)=1 (utilice h=0.5 para el proceso iterativo y método de Euler)

      Según el método de Euler:

$$
\begin{aligned}
Z_{1,i+1} &= Z_{1,i} + 0.5\ Z_2 \\
Z_{2,i+1} &= Z_{2,i} + 0.5\ (8 - Z_4) \\
Z_{3,i+1} &= Z_{3,i} + 0.5\ Z_4 \\
Z_{4,i+1} &= Z_{4,i} + 0.5\ Z_2
\end{aligned}
$$

i	t	z1	z2	z3	z4
0	0	0	1	0	1
1	0.5	0.5	4.5	0.5	1.5
2	1	2.75	7.75	1.25	3.8

La solución es: X(1) = 2.75; Y(1) = 1.25

5. La demanda diaria de un producto es aleatoria, según estudios esta tiene una función de densidad como:

   $f(d) = 3\ d^2/26$ para una demanda entre 1 y 3. Si se tienen números aleatorios uniformes entre 0 y 1 en secuencia como: 0.012, 0.8, 0.83, 0.21, 0.19, 0.1, 0.542, 0.21, 0.45, 0.28, 0.86, 0.91, 0.72 y 0.32

   Cuales serian las demandas simuladas para los siguientes dos días. Utilice el método del rechazo.

- Normalizar el rango de f(x) mediante un factor "c" tal que:
  $c\ f(x) \le 1$

  $c\ (3d^2/26) \le 1$. Como $1<d<3$

  $c = 26/27$

  La función acotada es: $3d^2/27 = d^2/9$

- Definir a "d" como una función de r [0,1]
  $d = 1 + (3 – 1)\ r = 1 + 2\ r$
  $d=1 + 2\ r$
  en la función acotada:

  $(1+2\ r)^2 /9$

- Generar pares de números " r1 " y " r2" en [0,1]

  Par 1: r1=0.012, r2=0.8 - - -> $0.8 \le (1+2\ (0.012))^2 /9$ (no satisface)
  Par 2: r1=0.83, r2=0.21 - - -> $0.21 \le (1+2\ (0.83))^2 /9$ (si satisface) entonces r= 0.83

  $d=1 + 2\ r1 = 1+ 2(0.83) = 2.66$

  Par 3: r1=0.19, r2=0.1 - - -> $0.1 \le (1+2\ (0.19))^2 /9$ (si satisface) entonces r= 0.19
  $d=1 + 2\ r1 = 1+ 2(0.19) = 1.38$