Universidad Nacional Agraria La-Molina
Dpto. Estadística e Informática
18-12-09

Examen final de métodos numérico y simulación

1. Halle el ángulo de rotación en grados y la matriz de rotación plana P de la matriz A y pruebe que los vectores característicos son ortogonales.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ y la matriz } P = \begin{bmatrix} -sen(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & sen(\theta) \end{bmatrix}$$

Sol: P'AP

$$\begin{bmatrix} -s & -c \\ -c & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -c \\ -c & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s-2c & -2s+c \\ 3c+2s & -2c-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s & -c \\ -c & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3s^2+4sc+c^2 & -2sc+2c^2-2s^2 \\ -2sc-2s^2+2c^2 & -3c^2-4sc-s^2 \end{bmatrix}$$

Significa que $-2sc+2c^2-2s^2 = 0$
-seno(2θ) +2 cos(2θ) = 0
tg(2θ)=2
θ = ½ arc tg(2)
Angulo de rotación = 0.5*atan(2)*180/pi = 31.71747 grados

$$P = \begin{bmatrix} -0.5257311 & -0.8506508 \\ -0.8506508 & 0.5257311 \end{bmatrix}$$

Prueba ortogonalidad $P'P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, P[1,]%*%P[,2] = 0

2. Utilice la siguiente tabla de datos de la distribución t-student para gl =8, las probabilidades acumulativas para los valores de X son:

X < -1.0	X< -1.1	X < -1.2	X < -1.3	X < -1.4
0.173	0.152	0.132	0.115	0.1

Mediante diferencias finitas de segundo orden encuentre la probabilidad de X > -1.5

Sol: Se tiene espaciamientos iguales, ordenando la tabla se tiene:

X < -1.4	X< -1.3	X< -1.2	X< -1.1	X< -1.0
0.1	0.115	0.132	0.152	0.173

El valor a interpolar es -1.4. Se utiliza diferencias finitas hacia delante

t(-1.5)= t(-1.4+α(0.1))
-1.4 + α(0.1) = 1.5, significa que α=-1
t(-1.5) = 0.1 + (-1)(0.115-0.1) +0.5(-1)(-1-1)(0.132-2*0.115+0.1) = 0.087
Prob(x>-1.5) = 1- 0.087=0.913. En R se tiene 1- pt(-1.5,8) = 0.91399

3. La siguiente tabla corresponde a la función t(x,gl) de student a 8 gl.

-1.0	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4
0.228	0.205	0.184	0.163	0.144

Hallar por extrapolación en Simpson la probabilidad de X entre -1.4 y -1 para 8 grados de libertad.

Sol: Ordenando

-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1.0
0.144	0.163	0.184	0.205	0.228

h=0.1
S(h): 0.1/3 * (0.144+4*0.163+0.184) + 0.1/3 * (0.184+4*0.205+0.228) = 0.07373333

s(2h) = 0.2/3 *(0.144 + 4* 0.184 + 0.228) = 0.07386667

$$\frac{2^4 S(h) - S(2h)}{2^4 - 1} = \frac{16 * 0.07373333 - 0.07386667}{16 - 1} = 0.07372444$$

pt(-1,8) - pt(-1.4,8) = 0.07375707

4. Ecuaciones diferenciales

a) Escribir el algoritmo de taylor de orden 2 para $Y' + Y^2/x = 0$; $Y(1) = -1$

$$Y_{k+1} = Y_k + h\, Y'_k + 1/2\, h^2\, Y''_k$$

$Y' = -Y^2/x$; Derivando: $Y'' = -2YY'/x + Y^2/x^2$

Aplicando: $Y_{k+1} = Y_k - hY^2_k/x_k - h^2 Y^3_k/x_k + Y^2_k/x^2_k$; $Y_0=-1$, $x_0=1$

b) Resolver la ecuación $xY'' + Y' + xY = 0$, $Y(0.5)=1$, $Y'(0.5)=0$, para x=1.5, 2 con h=0.5

$Y'' = -Y'/x - Y$; con cambio de variable: $Z = Y$; $W = Y'$
$Z' = Y' = W$
$W' = Y'' = -W/x - Z$
Por Euler, el algoritmo es:

k	x	Z=Y	W=Y'
0	0.5	1	0
1	1	1	-0.5
2	1.5	0.75	-0.75
3	2	0.375	-0.875

$$Z_{k+1} = Z_k + 0.5\, W_k$$
$$W_{k+1} = W_k - 0.5\, W_k / x_k - 0.5\, Z_k$$

Y(1.5)=0.75, Y(2)=0.375