Examen Parcial de Métodos numéricos y simulación
(Mayo – 2012)

1. En un proceso se realiza las siguientes operaciones: X = a/b, Y= log10(X) y Z = Y/c, "a" no tiene error, su valor es 11.23, b=1.31± 0.01 y c= 101.101 ± 0.008. Halar los valores de X, Y y Z con sus respectivos errores absolutos.

$$X = a/b = 11.23/1.31 = 8.572519$$
$$\left|\partial X/\partial b\right| = \left|-a/b^2\right| = \left|-11.23/1.31^2\right| = 6.543908$$
$$EX = 6.543908(0.01) = 0.06543908$$
$$X = 8.572519 \pm 0.06543908$$

$$Y = \log(X)/\log(10) = 0.9331085$$
$$\left|\partial Y/\partial X\right| = \left|1/(X\log(10)\right| = \left|1/(8.572519(\log(10))\right| = 0.05066124$$
$$EY = 0.05066124(0.01) = 0.06543908$$
$$Y = 0.9331085 \pm 0.003315225$$

$$Z = Y/c = 0.9331085/101.101 = 0.009229469$$
$$\left|\partial Z/\partial Y\right| = \left|1/c\right| = \left|1/101.101\right| = 0.0098910099$$
$$\left|\partial Z/\partial c\right| = \left|-Y/c^2\right| = \left|-0.9331085/101.101^2\right| = -9.128959\text{x }10^{-5}$$
$$EZ = 0.009891099(0.003315225) + 9.128959x10^{-5}(0.008) = 3.352154x10^{-5}$$
$$Z = 0.009229469 \pm 3.352154x10^{-5}$$

2. La siguiente función $\mathbf{10^x - 10x + 2}$ tiene dos raíces en [0.4 y 0.8], halle las raíces con 3 iteraciones y escriba la solución " x ± error" según las siguientes condiciones:

   localizando la raíz menor

   f(x) = 10^x + 10x + 2

   f(0.4) = 0.5118864
   f(0.8) = 0.3095734
   f(0.6) = -0.01892829

   Una raíz en]0.4, 0.6[y la segunda raíz en]0.6,0.8[

   a) Secante para la raíz menor en]0.4, 0.6[

   $$X_{i+1} = \frac{X_{i-1} f(X_i) - X_i f(X_{i-1})}{f(X_i) - f(X_{i-1})}$$; X_{-1} =0.6, X_0 =0.4

   X_1 = (0.6*f(0.4)-0.4*f(0.6))/(f(0.4)-f(0.6)) = 0.5928682

X_2 = (0.4*f(0.5928682)- 0.5928682*f(0.4))/(f(0.5928682)-f(0.4)) = 0.588288
X_3 = (0.5928682*f(0.588288)- 0.588288*f(0.5928682))/(f(0.588288)-f(0.5928682))
= **0.5807782**
X_4 = (0.5807782*f(0.588288)- 0.588288*f(0.5807782))/(f(0.588288)-f(0.5807782))
= 0.5815847
E_3 = | 0.5807782 - 0.5815847|= **0.0008065**

El error puede ser estimado de: Ex = E(f(x)) /|f'(x)|, dado que f(x*) =0
E(f(x)) = | f(X_3) – 0 | = 0.0009305767
|f'(X_3)| =1.230115
E_3 = 0.0007564957

X = 0.5807782 ± 0.00075

b) Newton para la raíz mayor en]0.6,0.8[; valor X_0 = 0.8

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}\ ;\ f'(x) = 10^x \log(10) - 10$$

X_1 = 0.8 - f(0.8) / f'(0.8) = 0.7316363
X_2 = 0.7316363 - f(0.7316363) / f'(0.7316363) = 0.700866
X_3 = 0.700866 - f(0.700866) / f'(0.700866) **= 0.692412**
X_4 = 0.692412 - f(0.692412) / f'(0.692412) = 0.6917067

E_3 = | 0.692412 - 0.6917067|= **0.0007053**

X = 0.692412 ± 0.0007053

3. En un el sistema de ecuaciones A x = b, El sistema puede tener solución única o múltiple solución o simplemente sin solución, para ello encuentre los rangos y de su respuesta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ \text{Matriz aumentada } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Orden de A = 4

Rango de A:

Paso 1: f2=f2+f1; f4=f4+f1; $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Paso 2: f3=f3-f2; f4=f4-2f2; $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Rango de A = 3

Rango de B

Paso 1: f2=f2+f1; f4=f4+f1; $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 6 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 12 & 4 & 10 & 1\end{bmatrix}$

Paso 2: f3=f3-f2; f4=f4-2f2; $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 14 & 7\end{bmatrix}$

Paso 3: f4=f4-7f2; $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$

Rango de la matriz aumentada = 4.

δ(A) ≠ δ(B). Por lo tanto no hay solución, el sistema es inconsistente.

4. Dado el sistema Ax= b, adecuar el sistema a una triangular superior por operaciones elementales y resolver este nuevo sistema si el sistema original es:

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6\\ 9 & 7 & 8\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

La matriz conjunta $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 4 & 5 & 6 & -2\\ 9 & 7 & 8 & 1\end{pmatrix}$

Paso 1: f2=f2-4f1; f3=f3-9f1; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -7 & -2 & 2\\ 0 & -20 & -10 & 10\end{pmatrix}$

Paso 2: f3=7f3 - 20f2; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -7 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -30 & 30\end{pmatrix}$

Sistema triangular:

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -2\\ 0 & 0 & -30\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 30\end{pmatrix};$

Solucion:

X3 = 30/(-30) = -1

X2 = (2 + 2*(-1))/(-7) = 0

X1 = (-1 -3*(0) -2*(-1))/1 = 1