

Diferenciacion e Interpolacion numerica.

Diferencias finitas

Dadas las abscisas X_i uniformemente espaciadas $X_{k+1} = X_k + h$, a las que corresponde valores de funcion $f(x)$: $f(X_k)$ se definen las primeras diferencias finitas (“Hacia delante”) como:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

Analogamente pueden definirse las segundas diferencias como:

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

y en general las diferencias finitas hacia delante de orden n:

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

$$\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f_{k+n-i} \quad ; \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Una “tabla de diferencias” es un arreglo de la forma:

k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^8 f_k$				
0	0	0	0	0	1	-5	15	-35	70
1	0	0	0	1	-4	10	-20	35	
2	0	0	1	-3	6	-10	15		
3	0	1	-2	3	-4	5			
4	1	-1	1	-1	1				
5	0	0	0	0					
6	0	0	0						
7	0	0							
8	0								

Esta tabla tambien muestra como un error pequeño en las f_k puede ampliarse en las diferencias altas (esto puede ser util para estudiar posibles errores en una tabla de $f(v, x)$).

Las diferencias finitas tienen ciertas propiedades analogas a las derivadas. Así, por ejemplo:

$$\Delta(c_1 u_k + c_2 v_k) = c_1 \Delta u_k + c_2 \Delta v_k$$

$$\Delta(u_k v_k) = u_k \Delta v_k + v_k \Delta u_k$$

$$\Delta\left(\frac{u_k}{v_k}\right) = v_k \Delta u_k - u_k \Delta v_k$$

$$\delta^n f_k = \delta^{n-1} f_{k+1/2} - \delta^{n-1} f_{k-1/2}$$

puede entonces escribirse:

$$\Delta f_k = \nabla f_k = \delta f_{k+1/2}$$

y en general:

$$\Delta^n f_k = \nabla^n f_{k+n} = \delta^n f_{k+n/2}$$

Para puntos con espaciamentos no uniformes pueden calcularse las “diferencias divididas”

$$\{x_0, x_1\} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \{x_1, x_0\}$$

$$\{x_0, x_1, x_2\} = \frac{\{x_0, x_1\} - \{x_1, x_2\}}{(x_0 - x_2)}$$

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \frac{\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{(x_0 - x_n)}$$

por ejemplo:

k	x _k	f _k	{x _k , x _{k+1} }	{x _k , x _{k+1} , x _{k+2} }	{x _k , x _{k+1} , ..., x _{k+n} }
0	0	-5			
1	1	1	6	2	
2	3	25	12	6	1
3	4	55	30	11	0
4	6	181	63	15	0
5	7	289	108		

Para el caso de puntos con espaciamento uniforme h, las diferencias divididas pueden relacionarse con diferencias finitas hacia delante:

$$\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\} = \frac{\Delta^n f_i}{n! h^n}$$

y en forma similar con diferencias hacia atrás o diferencias centrales.

Si f(x) es un polinomio de grado “n”, las diferencias finitas de orden (n+1) o superior obtenidas con los f_k = f(x_k) son cero (f(x) para el ejemplo anterior es un polinomio de tercer grado).

Interpolación

Supongase que se tiene una tabla de valores tal como:

X _k	f(X _k)
0.0	1.000000
0.1	0.995004
0.2	0.980067
0.3	0.955336
0.4	0.921061
0.5	0.877582

Y se requiere calcular $f(0.25)$ para ello, $f(x)$ puede aproximarse por una función relativamente simple, $g(x)$, tal que $g(x_k)=f(x_k)$, con frecuencia:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Pero también son frecuentes aproximaciones con funciones trigonométricas o exponenciales, v.g.:

$$g(x) = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \dots + b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + \dots$$

En lo que sigue se hace énfasis en interpolaciones polinómicas. Dado $(n+1)$ puntos x_k , $f(x_k)$ solo un polinomio de grado n , $P_n(x)$, satisface las condiciones $P_n(x_k) = f(x_k)$ para todo k . Sus coeficientes a_i podrían obtenerse resolviendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \end{bmatrix}$$

Pero esto no es práctico. Procesos más eficientes se revisan a continuación.

4.2.1 Fórmulas sobre interpolación de Newton

Para puntos uniformemente espaciados hacia adelante

$$f(x_0 + \alpha h) = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \Delta^j f_0$$

Esta expresión es fácil de obtener considerando un operador como E tal que $E f_k = f_{k+1}$, es decir $E = 1 + \Delta$. Como $E^n f_k = f_{k+n}$

Puede escribirse: $f(x_0 + \alpha h) = E^\alpha f_0 = (1 + \Delta)^\alpha f_0$.

Generalmente se considera solo algunos términos de esta serie; por ejemplo despreciando diferencias de orden 3 o superior:

$$f(x_k + \alpha h) = f_k + \alpha \Delta f_k + \frac{1}{2} \alpha(\alpha - 1) \Delta^2 f_k$$

$$f(x_k + \alpha h) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} f_k + \alpha(2 - \alpha) f_{k+1} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} f_{k+2}$$

Considerando los valores numéricos:

k	x_k	f_k
2	0.2	0.980067
3	0.3	0.955336
4	0.4	0.921061

Espaciamiento $h=0.1$, el valor de $f(0.25)$ podría obtenerse con $\alpha = 0.5$

$$f(x_2 + 0.5 h) = \frac{1}{2} (-0.5)(-1.5)(0.980067) + (0.5)(1.5)(0.955336) + \frac{1}{2} (0.5)(-0.5)(0.921061)$$

$$f(0.25) = 0.9688945 \quad (\text{el valor exacto es } 0.9689124\dots)$$

Similarmente puede escribirse la fórmula de Newton con diferencias hacia atrás.

$$f(x_n + \alpha h) = f_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\dots(\alpha + j - 1)}{j!} \nabla^j f_n$$

Para algunos términos de la serie

$$f(x_n + \alpha h) = f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) \nabla^2 f_n$$

De igual forma se puede expresar todo en términos de “ ∇ ”.

También se puede utilizar diferencias centrales para realizar interpolación para espaciamentos iguales, fórmulas de Gauss:

$$f(x_k + \alpha h) = f_k + \alpha \delta f_{k+1/2} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha - 1) \delta^2 f_k + \frac{1}{6} \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) \delta^3 f_{k+1/2} + \dots$$

$$f(x_k + \alpha h) = f_k + \alpha \delta f_{k-1/2} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) \delta^2 f_k + \frac{1}{6} \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) \delta^3 f_{k-1/2} + \dots$$

Promediando las dos expresiones se obtiene la formula de Stirling (1880):

$$f(x_k + \alpha h) = f_k + \frac{\alpha}{2} (\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}) + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 f_k + \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)}{12} (\delta^3 f_{k+1/2} + \delta^3 f_{k-1/2}) + \dots$$

Ejemplo:

k	x _k	f _k	δ f _k	δ ² f _k
2	0.2	0.980067		
2.5			-0.024731	
3	0.3	0.955336		-0.009544
3.5			-0.034275	
4	0.4	0.921061		

Como se tiene hasta la segunda diferencia central, se tomara solo 3 terminos de la serie del método de Stirling:

$$f(x_k + \alpha h) = f_k + \frac{\alpha}{2} (\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}) + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 f_k$$

Hallar f(0.25), k=3, α = -0.5, h=1

$$f(0.25) = 0.955336 + (-0.5/2) (-0.034275 - 0.024731) + (-0.5)^2 (-0.009544)/2$$

$$f(0.25) = 0.9688945$$

Para el caso de espaciamentos diferentes, se utiliza las diferencias divididas.

$$f(x) = f_0 + \{x_0, x_1\}(x - x_0) + \{x_0, x_1, x_2\}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

k	x _k	f _k	{x _k , x _{k+1} }	{x _k , x _{k+1} , x _{k+2} }			
0	0	1					
			-0.099665				
1	0.2	0.980067		-0.49215			
			-0.24731		0.037375		
2	0.3	0.955336		-0.4772		0.03888889	
			-0.34275		0.06070833		-0.0013889
3	0.4	0.921061		-0.4529167		0.03791667	
			-0.478625		0.07966667		
4	0.6	0.825336		-0.42105			
			-0.60494				
5	0.7	0.764842					

$$f(0.25) = 0.980067 + (-0.24731)(0.25 - 0.2) + (-0.4772)(0.25 - 0.2)(0.25 - 0.3) + \\ + (0.06070833)(0.25 - 0.2)(0.25 - 0.3)(0.25 - 0.4) + \\ + (0.03791667)(0.25 - 0.2)(0.25 - 0.3)(0.25 - 0.4)(0.25 - 0.6)$$

$$f(0.25) = 0.9689123 \text{ (con 5 terminos)}$$

con menos terminos se tendra una aproximación mas lejana:

Resumen de las aproximaciones para la aproximación de $f(0.25)$:

Terminos	Aproximacion	Error Abs	cifras signif.
1	0.980067	0.11×10^{-1}	1
2	0.9677015	0.12×10^{-2}	2
3	0.9688945	0.18×10^{-4}	4
4	0.9689173	0.48×10^{-5}	5
5	0.9689123	0.13×10^{-7}	7

Ejercicios:

1. Hallar varias aproximaciones de $f(0.25)$ siguiendo otras trayectoria,
2. Construir los programas de interpolacion por los diferentes métodos hasta tres terminos de la serie aproximada de newton para los tres casos (Diferencias finitas hacia delante, atrás, centrales y divididas)

Formulas de Interpolacion de Lagrange.

Esta formula es mas adecuada para analisis teorico que para el computo practico. El polinomio de interpolacion se obtiene como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^m g_i(x) f_i$$

Donde,

$$g_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

El siguiente ejemplo es ilustrativo:

k	x_k	f_k
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$g_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$g_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{1}{2}(-x^2 + 3x)$$

$$g_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^2 g_i(x) f_i = 2x^2 + 4x - 5$$

Interpolación Inversa

En la solución de $f(x) = 0$ puede obtenerse aproximaciones a una raíz x^* , por interpolación de una función inversa con ordenadas x_k para abscisas de espaciamiento no uniforme, $f(x_k)$. Por ejemplo:

x_k	f_k
1	1.76
2	0.41
3	-0.16
4	-0.32