## Integración numérica

La evaluación de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ en forma explicita es a veces muy difícil; o particularmente imposible. En tales casos puede hacerse una aproximación numérica tal como las que se mencionan a continuación:

## Regla de trapecios.

Una posible forma de resolver el problema es aproximando localmente la funcion f(x) por otra g(x) mas simple de integrar.

La regla de los trapecios se aproxima a f(x)con segmentos de recta y entonces:

$$\int_{x0}^{x1} f(x)dx \cong \frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)]$$

Esta aproximación puede generalizarse para un intervalo [x0, xh]. Considerando abscisas con espaciamiento uniforme, $X_i = X_{i-1} + h$ para las que se tiene valores de la función $f_i=f(x_i)$, puede hacerse interpolaciones lineales en cada sub-intervalo $[X_i, X_{i+1}]$ para obtener:

$$\int_{x0}^{xn} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

el error de truncamiento puede estimarse mas fácilmente considerando primero un sub-intervalo, v..g. int[-h/2, h/2], para el cual siendo h pequeño:

$f(x) = f(0) + xf'(0) + ½\, x^2 f''(0) + 1/6\, x^3 f'''(0) + 1/24\, x^4 f^{iv}(0)+\dots+$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = hf(0) + \frac{h^2}{24} f''(0) + \frac{h^4}{1920} f^{iv}(0) + \dots$$

y tambien: $f(\pm h/2) = f0 \pm h/2\, f'(0) \pm h/8\, f'(0) \pm h/48\, f'''(0) \pm h/384\, f^{iv}(0) \pm \dots$
por lo tanto,

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(h/2) + f(-h/2)] - \frac{h^3}{12} f'''(0) - \frac{h^4}{480} f^{iv}(0)$$

Si h es pequeño el error local de truncamiento es de $O(h^3)$. Sin embargo para integrar etre limites a y b se requiere (b-a)/h subintervalos (este numero es inversamente proporcional a h) y el error global es entonces del $O(h^2)$.

**Regla de Simpson.**

La aproximación local se hace interpolando parabolas de 2do grado, considerando puntos con abscisas uniformemente espaciadas:

$$\int_{x0}^{x2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) - \frac{h^5}{90} f^{iv}(x_1) + \dots$$

y en general considerando un numero par de subintervalos:

$$\int_{x0}^{xn} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right) + O(h^n)$$

Esta formula es exacta cuando f(x) es un polinomio de grado 3.

Las formulas de los trapecios y de Simpson corresponden al grupo de formulas de Newton-Cotes de intervalo cerrado. Algunas formulas de este grupo son:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right) + O(h^3) \quad \text{(Regla de Simpson de los 3/8)}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4\right) + O(h^4) \quad \text{(Bode)}$$

También pueden obtenerse fórmulas que utilizan puntos uniformemente espaciados pero no incluyen valores de la funcion en uno o dos limites de la integral. Estas son formulas de Newton-Cotes de intervalo abierto:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}\left(f_1 + f_2\right) + O(h^3)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}\left(2f_1 - f_2 + 2f_3\right) + O(h^5)$$

Extrapolación de Richarson y el método de Romberg

Si T(h) es la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ obtenida de la aplicación de la regla de trapezoidal con intervalo "h", puede escribirse:

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + a_1h^2 + a_2h^4 + a_3h^6 + ...$$

$$T(2h) = \int_a^b f(x)dx + a_1(2h)^2 + a_2(2h)^4 + a_3(2h)^6 + ... \text{ y entonces:}$$

$$\frac{4T(h) - T(2h)}{3} = \int_a^b f(x)dx + b_2h^4 + b_3h^6$$

es decir que 1/3(4T(h)-T(2h)) es una aproximación a $\int_a^b f(x)dx$ con un error de truncamiento de $O(h^4)$ menor que T(h) ó T(2h). En forma simila, para la regla de Simpson:

$$S(h) = \int_a^b f(x)dx + b_2h^4 + b_3h^6 + b_4h^8 + ...$$

$$s(2h) = \int_a^b f(x)dx + b_2(2h)^4 + b_3(2h)^6 + b_4(2h)^8 + ... \text{ y entonces:}$$

$$\frac{2^4 S(h) - S(2h)}{2^4 - 1} = \int_a^b f(x)dx + c_3h^6 + c_4h^8$$

Es una mejor aproximación a la integral, con un error global de $O(h^6)$