

Examen final de métodos numérico y simulación (Puntaje: 5 c/u)

1. Halle la raíz característica más grande en términos absolutos hasta la 4ta iteración de la matriz A y luego aplique Rayleigh y compare el valor con el valor más exacto encontrado al resolver el polinomio característico  $|A-\lambda I|$ . Halle su error.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico:  $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$

Raíces: 0.236068, -4.236068

La raíz más grande es -4.236068.

i	x	Ax	r
0	1	-3	
	0	2	-3
1	1	-4.3333	
	-0.6666	2.6666	-4.3333
2	1	-4.2308	
	0.61538	2.6154	-4.2308
3	1	-4.2363	
	-0.6181	2.6181	-4.2363
4	1		
	-0.618		

Rayleigh:  $X'AX/X'X = -5.854234/1.381997 = -4.236068$

Error =  $|-4.236068 - (-4.236068)| = 0$

2. Utilice la siguiente tabla de la función de densidad Chi-cuadrada para 11 grados de libertad (f(x) es definida en el intervalo  $0 < x < +\infty$ ):

X	0	2	4	6	8	10	12	14
f(X)	0	0.0035	0.0293	0.0667	0.0896	0.09	0.0752	0.0553

X	16	18	20	22	24	26	28	30
f(X)	0.0371	0.0232	0.0137	0.0077	0.0042	0.0022	0.0011	6.00E-04

Halle por interpolación el valor de  $f(17)$ . Utilice hasta la tercera diferencia finita.

$dchisq(17, 11) = 0.02957981$

Por interpolación:

16	0.0371	-0.0139	0.0044	-0.0009
18	0.0232	-0.0095	0.0035	-0.001
20	0.0137	-0.006	0.0025	-0.001
22	0.0077	-0.0035	0.0015	-0.0006
24	0.0042	-0.002	0.0009	-0.0003
26	0.0022	-0.0011	0.0006	

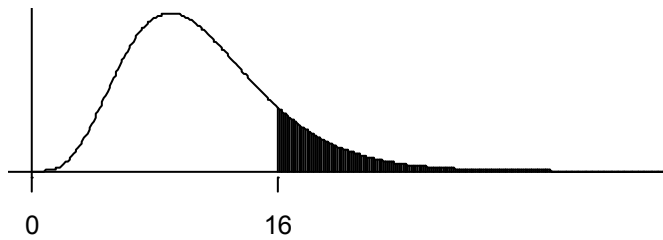
$$f(x_0 + \alpha h) = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!} \Delta^j f_0$$

$$17 = X_0 + \alpha h \rightarrow X_0 = 16, h = 2, \alpha = 0.5$$

$$f(17) = 0.0371 + 0.5 * (-0.0139) / 1 + 0.5 * (-0.5) * 0.0044 / 2 + 0.5 * (-0.5) * (-1.5) * (-0.0009) / 6$$

$$f(17) = 0.02954375$$

3. Con la tabla de la pregunta 2, halle la probabilidad de  $x > 16$ , mediante extrapolación de Simpson (utilice  $h=2$ ).



Sol:  $P(X > 16) = 1 - P(0 < x < 16)$ . Calculando por Simpson:  
para  $h=2$ :

$$S(h) = (2/3) * (0 + 4 * 0.0035 + 2 * 0.0293 + 4 * 0.0667 + 2 * 0.0896 + 4 * 0.09 + 2 * 0.0752 + 4 * 0.0553 + 0.0371) = 0.8582$$

$$S(2h) = (4/3) * (0 + 4 * 0.0293 + 2 * 0.0896 + 4 * 0.0752 + 0.0371) = 0.8457333$$

$$(2^4 * 0.8582 - 0.8457333) / (2^4 - 1) = 0.8590311$$

$$P(x > 16) = 1 - P(x < 16) = 0.1409689$$

#### 4. Resolver por Euler la ecuación diferencial:

$$(\sin^2(t)) Y'' - 2 \sin(t) \cos(t) Y' + (1 + \cos^2(t))Y = 0$$

$Y(0.5)=0$ ,  $Y'(0.5)=1$ ; para  $t=1.5$  y  $2.5$  Utilice  $h=0.5$

Sol:

$$Y'' = (2 \sin(t) \cos(t) Y' - (1 + \cos^2(t))Y) / \sin^2(t)$$

$$Z_1 = Y$$

$$Z_2 = Y'$$

Entonces

$$Z_1' = Z_2$$

$$Z_2' = (2 \sin(t) \cos(t) Z_2 - (1 + \cos^2(t))Z_1) / \sin^2(t)$$

$$Z_{1,i+1} = Z_{1,i} + 0.5 * Z_{2,i}$$

$$Z_{2,i+1} = Z_{2,i} + 0.5 * (2 \sin(t_i) \cos(t_i) Z_{2,i} - (1 + \cos^2(t_i)) Z_{1,i}) / \sin^2(t_i)$$

```
z1<-rep(0,5); z2<-rep(1,5); t<-0
for(i in 1:4) {
t<-t+0.5
z1[i+1]<-z1[i]+0.5*z2[i]
z2[i+1]<-z2[i]+0.5*(2*sin(t)*cos(t)*z2[i]-
(1+(cos(t))^2)*z1[i])/(sin(t))^2
}
cbind(t=seq(0.5,2.5,0.5), z1,z2)
```

	t	z1	z2
[1,]	0.5	0.000000	1.000000
[2,]	1.0	0.500000	2.8304877
[3,]	1.5	1.915244	4.1917815
[4,]	2.0	4.011135	3.5217875
[5,]	2.5	5.772028	-0.9356863

Como  $Y=z_1$ , entonces:

$$Y(1.5) = 1.915; Y(2.5) = 5.772$$