Universidad Nacional Agraria La-Molina
Dpto. Estadística e Informática

Examen final de Métodos Numérico y Simulación
(13 Julio 2009)

1. La matriz de correlación de 3 características del suelo pH, conductividad eléctrica y carbonato de calcio es:

```
         pH   CE CaCO3
pH    1.00 0.55  0.73
CE    0.55 1.00  0.32
CaCO3 0.73 0.32  1.00
```

   Hallar la raíz característica mas grande por el método directo y su vector asociado con 2 iteraciones. Mejore la aproximación del valor propio mediante el cociente de Rayleigh. Si los valores propios exactos son: 2.0839128, 0.6960556, 0.2200316. ¿Cuántas cifras significativas exactas tiene la aproximación ?.

2. Halle el ángulo de rotación plana para diagonalizar la matriz A, si la matriz de rotación plana P esta definida como:

$$P = \begin{bmatrix} sen(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & sen(\alpha) \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

   si la matriz A tiene los siguientes valores a=3, b=2 y d=1 para hallar las raíces características y sus vectores asociados.

3. Utilice la siguiente tabla de datos:

x	-0.5	1	1.5	2
f(x)	-2	1	2.4	1.8

   Para hallar la raíz de f(x) mediante todas las diferencias divididas que se pueda disponer

4. La siguiente función f(x) es una función de densidad de probabilidades entre 0 y 4, para valores mayores de 4 y menores de 0, la función es 0. Halle la probabilidad para x entre 2 y3. Utilice Simpson con el mayor numero de puntos:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	0	0.107	0.429	1.071

   Posteriormente se conoció que la función es: $(x^3 - x) / 56$, y la tabla fue truncada a 3 decimales. ¿Cuál es el margen de error de la probabilidad encontrada por simpson?

5. Resolver la ecuación diferencial para Y(1.3) por Taylor de orden 2:

   $y' = 1 - x/y$ $\qquad\qquad$ $y(1) = 1.5$ y $h = 0.1$

Puntaje: 4 puntos c/u

Solución del examen final de Métodos Numérico y Simulación

6. La matriz de correlación de 3 características del suelo pH, conductividad eléctrica y carbonato de calcio es:

```
         pH   CE CaCO3
pH    1.00 0.55  0.73
CE    0.55 1.00  0.32
CaCO3 0.73 0.32  1.00
```

```
> a<- rbind(c(1,0.55,0.73), c(0.55,1,0.32),c(0.73,0.32,1))
```

```
Como todos los elementos de la diagonal son iguales, se puede usar cualquiera
como mayor, pero es recomendable poner 1 en los elementos mas grandes, en
este caso debe ser x=(1,1,1) que es de mayor aproximación.
```

```
> a
     [,1] [,2] [,3]
[1,] 1.00 0.55 0.73
[2,] 0.55 1.00 0.32
[3,] 0.73 0.32 1.00
> x<-c(1,1,1)
> xp <- a%*%x
> xp
     [,1]
[1,] 2.28
[2,] 1.87
[3,] 2.05
> r<-max(xp)
> r
[1] 2.28
```

```
> x<-xp/r
> xp <- a%*%x
> r<-max(xp)
> r
[1] 2.107456
> x<-xp/r
> x
          [,1]
[1,] 1.0000000
[2,] 0.7866805
[3,] 0.8975650
> rho <- t(x)%*%a%*%x / (t(x)%*% x)
> rho
         [,1]
[1,] 2.083814
```

La raíz característica aproximada según Rayleigh es: 2.082963
m=0
Error Abs = abs(rho - 2.0839128) = 0.0000987243 = 0.09 $10^{-3} \leq 0.5\ 10^{m-n+1}$
-3=-n+1
n=4 cifras significativas exactas.

Con x=c(1,0,0), rayleigh = 2.083814, error = 0.09 10^{-2} n=3.
con x=c(0,1,0), rayleigh = 2.038927, error = 0.04, n=1
para x=c(0,0,1), rayleigh =2.067579, error = 0.01, n=1

7. Halle el ángulo de rotación plana para diagonalizar la matriz A, si la matriz de rotación plana P esta definida como:

$$P = \begin{bmatrix} sen(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & sen(\alpha) \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix}; \quad P^{'} A = \begin{bmatrix} sa - cb & sb - cd \\ ca + sb & cb + sd \end{bmatrix};$$

El elemento de la matriz P'AP que debe ser cero corresponde al elemento fuera de la diagonal y es:

$cs(a-d)-b(c^2 - s^2) = 0$
$cs/(c^2 - s^2) = b/(a-d)$
$\frac{1}{2}\,sen(2\alpha)/\cos(2\alpha) = b/(a-d)$
$tg(2\alpha) = 2b/(a-d)$

Resp: el ángulo de rotación plana es: $\alpha = \frac{1}{2}\, arc\ tg(2b/(a-d))$

Aplicando a la matriz A donde a =3; d=1 y b=2

El ángulo α es: ½ arc tg(2) = 31.71747

Las raíces y vectores se encuentra mediante: P'AP, donde:

$$P = \begin{bmatrix} sen(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & sen(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5257311 & 0.8506508 \\ -0.8506508 & 0.5257311 \end{bmatrix};$$

$$P'A = \begin{bmatrix} -0.1241083 & 0.2008114 \\ 3.6034146 & 2.2270327 \end{bmatrix};\ P'AP = \begin{bmatrix} -0.236068 & 0 \\ 0 & 4.236068 \end{bmatrix}$$

$\lambda 1$=-0.236 y su vector asociado $\phi 1$
$\lambda 2$= 4.236 y su vector asociado $\phi 2$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.525731 \\ -0.85065 \end{bmatrix};\ \phi_2 = \begin{bmatrix} 0.85065 \\ 0.525731 \end{bmatrix}$$

8. datos:

x	-0.5	1	1.5	2
f(x)	-2	1	2.4	1.8

Para hallar la raíz de f(x) se considera f(x) como X

f(x)	x			
-2	-0.5			
		0.5		
1	1		0.197368	
		1.25		-0.38306
1.8	2		-1.4881	
		-0.83333		
2.4	1.5			

Según los datos, la raíz debe estar entre –0.5 y 1
Aplicando todos los puntos seria:

x = -0.5 + 0.5*(0+2) + 0.197398*(0+2)*(0-1) +0.38306*(0+2)*(0-1)*(0-1.8) = -1.2738

Lo cual no es correcto, considerando menos diferencias divididas se tendría:

x = -0.5 + 0.5*(0+2) + 0.197398*(0+2)*(0-1) = 0.105204

Entonces la raíz aproximada es = 0.105204

9. Datos:

x	0	1	2	3	4
F(x)	0	0	0.107	0.429	1.071

Pr(2 <x < 3) = Pr(x <3) – Pr(x < 2)

como se tiene 3 puntos, se aplica simpson
Para x<2: 1/3 (0 +4(0)+0.107) = 0.03566667
Para x<3: 0+ 1/3(0 +4(0.107)+0.429) = 0.2856667
La probabilidad es: 0.2856667 - 0.03566667 = 0.25
Como la funcion es $(x^3 - x) / 56$, integrando entre 2 y 3, el área exacta es: 0.2455357

```
f<- function(x) (x^3 - x) / 56
integrate(f, lower = 2, upper = 3)
0.2455357
```

El error absoluto es : 0.0044643, margen de error = 0.0044643*100/0.2455357 =1.8 %

10. Resolver la ecuación diferencial para y(1.3) por Taylor de orden 2:

$Y' = 1 - x/y \quad y(1) = 1.5$ y $h = 0.1$

$y_{i+1} = y_i + h\, y'_i + h^2/2\, y''_i$

$y' = 1 - x/y \quad ; \quad y'' = -1/y + x\, y'/y^2$

x	y	y’	Y’’
1	1.5	0.333333	-0.51852
1.1	1.53074	0.281394	-0.52118
1.2	1.55627	0.228928	-0.52914
1.3	1.57652	0.1754	-0.54257

Entonces para x = 1.3, y(1.3) = 1.57652