EXPERIMENTOS CON FACTORIALES

Los factoriales son combinaciones de factores (nitrógeno, fósforo, variedades, sustancias, niveles de concentrado, etc.) para formar tratamientos, los cuales se aplican en los diseños experimentales (DCA, DBCA, DCL). La información obtenida de estos experimentos es amplia, ya que permiten comparar los niveles de cada factor entre si y evaluar las interacciones que resulten como combinaciones de los factores, así como la comparación de niveles de un factor bajo un nivel de otro factor.

En un experimento con factoriales, si todos los niveles de un factor se combinan con todos los niveles de otro factor, entonces se dice que estos factores están cruzados. Si los niveles de un factor se combinan con ciertos niveles de otro factor se dice que estos factores están anidados.

Ejemplo. Los niveles de un factor A a_1, a_2, y a_3 se combinan con los niveles de un factor B b_1, b_2 de la siguiente forma:

```
┌──── a1 ───┐      ┌──── a2 ────┐      ┌──── a3 ────┐
|           |      |            |      |            |
b1          b2     b1           b2     b1           b2
```

Tratamientos : a_1b_1 ,a_1b_2 ,a_2b_1 ,a_2b_2 ,a_3b_1 ,a_3b_2
Los factores A y B están cruzados.

Ejemplo. Los niveles de un factor A a_1, a_2, y a_3 se combinan con los niveles de un factor B b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 de la siguiente forma:

```
┌──── a1 ───┐      ┌──── a2 ────┐      ┌──── a3 ────┐
|           |      |            |      |            |
b1          b2     b3           b4     b5           b6
```

Tratamientos : a_1b_1 ,a_1b_2 ,a_2b_3 ,a_2b_4 ,a_3b_5 ,a_3b_6
El factor B esta anidado en A. Se representa como : B(A)

En el presente capitulo será tratado los factoriales con FACTORES CRUZADOS.

CONCEPTOS GENERALES

FACTOR .- Es sinónimo de tratamiento e involucra diferentes niveles. Por ejemplo el Nitrógeno en la formación del abono, este puede contener diferentes porcentajes, cada uno constituye un nivel que también representa un tratamiento.

FACTORIAL .- Es una combinación de factores para formar tratamientos.

NIVEL .- Es la dosis o cantidad del ingrediente (Factor) empleado en el tratamiento. Ejemplo. 2 % de nitrógeno

EFECTO PRINCIPAL .- Es el efecto promedio del factor sobre los otros niveles del mismo factor independiente de los otros factores. Ejemplo: Efecto de nitrógeno en las unidades experimentales al aplicar un abono formado por nitrógeno, fósforo y potasio.

EFECTO INTERACCION .- Es el efecto adicional debido a la influencia combinada de dos o más factores. Ejemplo. Efecto conjunto Nitrógeno-Fósforo en la unidad experimental.

EFECTO SIMPLE .- Es el efecto de los niveles del factor en un nivel de otro factor. Ejemplo. Efecto del nitrógeno bajo la presencia de 0.5 % de fósforo. Es un efecto derivado del efecto de la interacción.

EFECTO SIMPLE SIMPLE .- Es el efecto de los niveles del factor a una combinación de los otros factores, por ejemplo, el efecto del nitrógeno en las unidades experimentales, bajo la presencia de 0.5% de fósforo y 1% de Potasio.

TIPOS DE FACTORES

FACTORES CUANTITATIVOS .- Si sus niveles son cantidades cuantificables. Ejemplo. Niveles de Fósforo a 0.5%, 1% y 1.5%

FACTORES CUALITATIVOS .- Si sus niveles no tienen orden natural y corresponden a clases o categorías. Ejemplo. Variedades de fríjol.

Ejemplo. un factor es definido por 3 sustancias de crecimiento a 4 niveles de concentración aplicados en un experimento para evaluar la propagación vegetativa de un cultivo sobre medios artificiales. La formación de callos se medirá a la cuarta semana.

El factor (A) sustancia de crecimiento con niveles :

a_1 : Acido Indolacético (AIA)
a_2 : Cinetina (C)
a_3 : Acido Naftalenoacético (ANA)

El factor (B) concentración con niveles :

b_1 : 0.0
b_2 : 0.1 μM
b_3 : 1.0 μM
b_4 :10.0 μM

Al combinar ambos factores A y B se tiene 3x4 = 12 tratamientos para ser evaluados.

Los factores se identifican con letras mayúsculas y los niveles con letras minúsculas, por ejemplo:

Factor sustancia = A con niveles a_1, a_2, a_3

Factor concentración = B con niveles b_1, b_2, b_3, b_4

La combinación resultante : a_1b_1, a_1b_2,a_1b_3,...,a_3b_4

Estos tratamientos son:

a_1b_1 = 0.0 concentración de AIA
a_1b_2 = 0.1 μM concentración de AIA
....
....
a_3b_4 = 10 μM de concentración de ANA

Si cada tratamiento se aplica a 4 unidades experimentales, se requiere 48 u.e. para realizar el experimento.

Los factoriales son expresados mediante la siguiente notación:

2A2B = 2x2 = 2^2: 2 niveles de A por 2 niveles de B.
2A3B = 2x3 : 2 niveles de A por 3 niveles de B.
2A2B2C = 2x2x2 = 2^3: 3 factores a 2 niveles cada uno.
2A3B3C = 2x3^2 : 2 niveles de A por 3 niveles de B y 3 niveles de C.

FORMACION DE FACTORIALES

En la formación de factoriales, se debe tener presente lo siguiente:

1.- Que factores deben incluirse.
2.- Que factores son fijos (modelo I) y que factores son al Azar (modelo II).
3.- Cuantos niveles por factor
4.- Si son factores cuantitativos, cual debe ser el espaciamiento entre los niveles del factor. Por ejemplo: 0%, 5% y 10% de nitrógeno, significa igual espaciamiento.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS EN EXPERIMENTOS CON FACTORIALES

Los experimentos con factoriales tienen las siguientes ventajas:

1. Permiten el estudio de los niveles de cada factor y las interacciones entre ellos.
2. Permiten el estudio de los niveles de un factor en la combinación de un sólo nivel de otro factor (estudio de efectos simples).
3. Todas las unidades experimentales intervienen en el estudio de todos los efectos del factor (principales e interacción)

Desventajas:

1. El número de unidades experimentales utilizadas es mayor que en experimentos simples y es más difícil contar con un número suficiente de unidades que requiere el experimento.
2. El análisis se complica, a medida que el número de factores y niveles aumenta.
3. Algunas combinaciones pueda que no sean de importancia, pero deben incluirse para completar el factorial, esto obliga a usar más unidades experimentales.

ANALISIS ESTADISTICO DE LOS FACTORIALES

Los factoriales son los tratamientos en los diseños experimentales, esto significa que la fuente de variación debida al efecto de tratamientos comprende los efectos derivados de la combinación de los factores. Así, por ejemplo:

Factor A, con 3 niveles, factor B con 2 niveles. El número de tratamientos son 3x2 = 6, con grados de libertad igual a (6-1)= 5.

Esta fuente (tratamientos) está descompuesta en :

Efecto de A con (3-1) =2 gl.
Efecto de B con (2-1) = 1 gl.
Efecto de AB con (3-1)(2-1) = 2 gl.

La suma de los grados de libertad 2+1+2 = 5, es igual a los gl. de tratamientos.

La descomposición es ortogonal, esto significa que los tratamientos deben tener IGUAL NUMERO DE REPETICIONES, de lo contrario no será posible descomponer en forma ortogonal la suma de cuadrados de tratamientos. La suma de cuadrados de tratamiento cumple la siguiente relación:

SC(tratamientos) = SC(A) + SC(B) + SC(AB)

En el caso de tres factores combinados (A,B y C), por ejemplo, 2 niveles de A, 3 niveles de B y 2 niveles de C resulta:

2x3x2 = 12 tratamientos, los gl. para tratamientos es 11

Las fuentes de variación deducidas son:

De lo efectos principales:

A con (2-1) = 1 gl.
B (3-1) = 2 gl.
C (2-1) = 1 gl.

De los efectos de la interacción:

AB (2-1)(3-1) = 2 gl.
AC (2-1)(2-1) = 1 gl.
BC (3-1)(2-1) = 2 gl.

De los efectos de Doble interacción:

ABC (2-1)(3-1)(2-1) = 2 gl.

La suma de grados de libertad son: 1+2+1+2+1+2+2 = 11; que son los correspondientes grados de libertad de tratamientos.

y SC(tratamientos) = SC(A)+SC(B)+SC(C)+SC(AB)+SC(AC)+SC(BC) +SC(ABC)

Los cuadrados medios de estas fuentes se obtienen dividiendo la suma de cuadrados entre los grados de libertad, y para la prueba de F, se divide cada CM con el CM del error, solo cuando se tiene factores aleatorios o anidados, es necesario hallar los esperados cuadrados medios.

COMPONENTES DE LOS ESPERADOS CUADRADOS MEDIOS.

Los esperados cuadrados medios de las fuentes de variación permiten conocer la relación de los cuadrados medios para el calculo del valor de F. Los factores pueden ser fijos o al azar. Si todos son fijos la relación es con el cuadrado medio del error, caso contrario se debe seguir lo siguiente:

1. Construir un cuadro de doble entrada. En la primera columna colocar las fuentes de variación, así: A, B, AB, Error; en la primera fila los factores principales A, B y R para las repeticiones.
2. Llenar los casilleros del cuadro, por columnas en la forma siguiente:
   a. Si es un factor al AZAR colocar "1" , si es FIJO colocar "0" en todos los casilleros de la columna respectiva en donde se tenga en el margen izquierdo el factor en mención. En el casillero de la columna que en el margen izquierdo está el erro

colocar "1", en los casilleros restantes colocar el número de niveles del factor en mención.

b. En la columna R (repeticiones), colocar "1" en el casillero del que en el margen izquierdo está el error y en los casilleros restantes el número de repeticiones.

3. Poner una columna adicional, y en cada casillero escribir las variancias correspondientes a cada fuente de variación:

$$\sigma^2_A\ ,\ \sigma^2_B\ ,\ \sigma^2_{AB}\ ,\ \sigma^2_{error}$$

4. Construido el cuadro, proceder a obtener los esperados cuadrados medios, según:
   a. Para un factor, por ejemplo A, no considerar esta columna, luego multiplique los valores de los casilleros correspondiente a las filas que tienen en el margen izquierdo la letra correspondiente al factor.
   b. Para una interacción, por ejemplo AB, no considerar las columnas que corresponden a estos factores (A,B), luego multiplique los valores de los casilleros correspondiente a las filas que tienen en el margen izquierdo las letras correspondientes a la interacción.
   c. Para el error, multiplique los valores que corresponden a la fila del ERROR.

Ejemplo.- Considere 3 factores A, B y C que se combinan para formar tratamientos y se aplican en un DCA con 5 repeticiones.

A: factor al azar con 2 niveles, B: factor fijo con 3 niveles, C: factor fijo con 4 niveles.

Aplicando la metodología, resulta:

	A	B	C	R	Variancia
A	1	3	4	5	σ^2A
B	2	0	4	5	σ^2B
C	2	3	0	5	σ^2C
AB	1	0	4	5	σ^2AB
AC	1	3	0	5	σ^2AC
BC	2	0	0	5	σ^2BC
ABC	1	0	0	5	σ^2ABC
Error	1	1	1	1	σ^2e

y los esperados cuadrados medios:

A: $\sigma^2_e + 60\,\sigma^2_A$

B: $\sigma^2_e + 20\,\sigma^2_{AB} + 40\,\sigma^2_B$

C: $\sigma^2_e + 15\,\sigma^2_{AC} + 30\,\sigma^2_C$

AB: $\sigma^2_e + 20\,\sigma^2_{AB}$

AC: $\sigma^2_e + 15\,\sigma^2_{AC}$

BC: $\sigma^2_e + 5\,\sigma^2_{ABC} + 10\,\sigma^2_{BC}$

ABC: $\sigma^2_e + 5\,\sigma^2_{ABC}$

Error: σ^2_e

Las fórmulas para hallar los valores de F calculados serían:

Para A: F_c = CM(A)/CM(error) ; $F_\alpha(1, 96)$

B: F_c = CM(B)/CM(AB) ; $F_\alpha(2, 2)$

C: F_c = CM(C)/CM(AC) ; F_α (3, 3)
AB: F_c = CM(AB)/CM(error) ; F_α (2, 96)
AC: F_c = CM(AC)/CM(error) ; F_α (3, 96)
BC: F_c = CM(BC)/CM(ABC) ; F_α (6, 6)
ABC: F_c = CM(ABC)/CM(error) ; F_α (6, 96)

INTERACCION DE FACTORES

La interacción de los factores juega un papel importante en el análisis, de ahí que las pruebas de F, se realizan en el siguiente orden: primero la interacción de orden superior, luego la de menor orden y por último los factores principales.

Si la interacción de mayor orden resulta significativa, termina las prueba del cuadro del ANVA y se procede a los análisis de los efectos simples-simples, esto significa comparar los niveles de un factor en la combinación de los otros factores.

Si la interacción de mayor orden no es significativa, continúan las pruebas de F con las interacciones de menor orden, si alguna de estas interacciones resulta significativa, se procede a los análisis de los efectos simples en estos factores; así, comparar los niveles del factor bajo la presencia de un nivel de otro factor.

Si en una prueba de una interacción de menor orden no resulta significativa, se continúan las pruebas de F de cada factor por separado, en el cuadro de ANVA.

Los resultados de cuadros de ANVA para 3 factores (ABC) resultan:

Ejemplo.- ABC : *

termina el ANVA, continúan los análisis de los efectos simples simples, es decir comparar los niveles del factor A en cada una de las combinaciones de los otros factores, B y C de igual forma.

Ejemplo.- ABC : ns

Continúan el análisis del ANVA.

AB : ns
AC : ns
BC : ns

Continúan el análisis del cuadro de ANVA, para los efectos principales de A, B y C.

Ejemplo.- ABC : ns

Continua el análisis del ANVA.

AB : *
AC : ns
BC : ns

Se prueban los efectos simples en cada factor (A y B), es decir comparar los niveles de A bajo la presencia de cada nivel de B y comparar los niveles de B bajo la presencia de cada nivel de A.
Luego continuar con el análisis en cuadro de ANVA sólo para los efectos principales de C.

Ejemplo.- ABC : ns

Continúa el análisis del ANVA.
AB : *
AC : *
BC : ns

Se prueban los efectos simples en cada factor (A y B), en los factores (A y C) se compararan los niveles de A bajo la presencia de cada uno de los niveles de C y en C se comparan sus niveles bajo la presencia de cada uno de los niveles de A.

Ejemplo.- ABC : ns

Continúa el análisis del ANVA.
AB : *
AC : *
BC : *

Se prueban los efectos simples en cada factor (A y B), en (A y C) y en (B y C).

El análisis de los efectos simples-simples y efectos simples pueden realizarse mediante la prueba de F (las sumas de cuadrados) ó una prueba comparativa de promedios (DLS, TUKEY).

Sólo para los casos de factores fijos es válido el análisis de efectos simples-simples, simples ó promedios.

Ejemplo 6. A es fijo y B al azar, AB resulta (*), no procede los análisis de efectos simples.

Ejemplo 7. A es fijo y B es fijo, AB resulta (*), procede los análisis de efectos simples.

GRAFICO DE LA INTERACCION

La interacción de factores se representa gráficamente, la tendencia indica el grado de interacción entre los factores, la cual aumenta a medida que las líneas tiendan a cruzarse.

En los siguientes gráficos se muestran los casos posibles de interacción en dos factores: A con 3 niveles y B con 2 niveles. En el eje X se registra los niveles de A y en el eje Y los promedios de la interacción de A y B. Los puntos son unidos con una linea, para cada nivel de B.

EFECTOS SIMPLES

El análisis de los efectos simples se realiza cuando existe una interacción de dos factores por ejemplo A y B. Los efectos simples se calculan a partir del cuadro de promedios de la combinación de factores.

Ejemplo: A con niveles (a_1, a_2, a_3) B con niveles (b_1, b_2). Aplicados en un DCA con 5 repeticiones.

Los efectos simples son: A(B) y B(A).

A(B): A(b_1), A(b_2)
B(A): B(a_1), B(a_2), B(a_3)

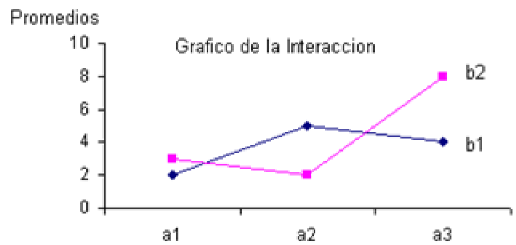
	b1			b2		
	a1	a2	a3	a1	a2	a3
Bloques	..	..	..	..	..	..
Yij.	10	30	20	15	10	40

Cuadro de totales.

	a_1	a_2	a_3	$Y_{.j.}$
b_1	10	30	20	60
b_2	15	10	40	65
$Y_{i..}$	25	40	60	125

Cuadro de promedios.

	a_1	a_2	a_3	$Y_{.j.}$
b_1	2	5	4	4
b_2	3	2	8	4.33
$Y_{i..}$	2.5	4	6	4.15



Efectos simples se obtiene como la diferencia de los promedios, según el caso:

$A(b_1)$: 2 -6 = -4, 4 -2 = 2, 6 -4 = 2 ; -4, 2, 2
$A(b_2)$: 3 -2 = 1, 8 -3 = 5, 2 -8 = -6 ; 1, 5, -6
$B(a_1)$: 2 -3 = -1
$B(a_2)$: 6 -2 = 4
$B(a_3)$: 8 -4 = 4

Con esta información se puede encontrar las sumas de cuadrados de estos efectos, usando la siguiente fórmula:

SC(efecto simple) = n (ð(efecto)^2)/(niveles del factor)
por ejemplo:

$SC(A(b_1)) = 5((-4)^2 + (2)^2 + (2)^2)/3 = 40$

$SC(A(b_2)) = 5((1)^2 + (5)^2 + (-6)^2)/3 = 103.33$

$SC(B(a_1)) = 5((-1)^2)/2 = 2.5$

$SC(B(a_2)) = 5(4^2)/2 = 40$

$SC(B(a_3)) = 5(4^2)/2 = 40$

A los grados de libertad de cada efecto simple le corresponde los grados de libertad del factor correspondiente, así:

gl $A(b_1)$ = 3-1 = 2
gl $A(b_2)$ = 3-1 = 2
gl $B(a_1)$ = 2-1 = 1

La prueba estadística se realiza mediante la prueba de F, los grados de libertad del efecto en estudio para el numerador y los grados de libertad del error para el denominador.

El valor de F calculado:

Fc = CM(del efecto) / CM(error)

Así para $A(b_2)$: Fc = CM($A(b_2)$) /CM(error).

Si el valor de Fc es superior o igual al valor crítico (FÂ), entonces se afirma estadísticamente que hay diferencia en los niveles del factor A bajo la presencia del nivel b_2. Si esto ocurre, puede realizar una prueba de t o Duncan, con los promedios; así por ejemplo mediante t-student:

para la comparación en $A(b_2)$, requiere la siguiente información:

Promedios: $a_1 = 3$

$a_2 = 2$; $S_d = \sqrt{\frac{2CM}{r}}$; $t\alpha$(gl error)

$a_3 = 8$

DLS(t-student) = $t\alpha\, s_d$

Notar que en la desviación estandar de la diferencia se considera el valor de "r", es el numero de datos que genera un promdio en estos efectos simples.

<u>FACTORIAL 2A2B = 2²</u>

Es el factorial más elemental en experimentación, formado por la combinación de 2 factores a 2 niveles cada uno. Puede aplicarse a cualquier diseño experimental.

EJEMPLO: Factorial 2A2B en Bloques.

Considere los factores CONTROL DE MALEZAS y FERTILIZANTE.

El factor (A) malezas con niveles :

a_1 = sin control de malezas
a_2 = con control de malezas

El factor (B) fertilizante con niveles :

b_1 = sin aplicación de fertilizante
b_2 = con aplicación de una dosis de fertilizante.

Los tratamientos son:

a_1b_1 = sin control de malezas ni fertilizante. Constituye el tratamiento testigo.
a_1b_2 = Se aplica dosis de fertilizante.
a_2b_1 = Se aplica control de maleza.
a_2b_2 = Se aplica control de maleza y fertilizante.

Suponga que estos tratamientos se aplican en un diseño Bloques completos al azar en 5 bloques, entonces el modelo aditivo lineal es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + B_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2 \\ k=1,2,...,5 \end{array}$$

μ = constante : parámetro
B_k = efecto del bloque k : parámetro
α_i = efecto del nivel a_i : parámetro
β_j = efecto del nivel b_j : parámetro
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecto de la interacción : parámetro
ε_{ijk} = efecto del error. Valor aleatorio normal e independientemente distribuido con media 0 y variancia σ^2.

Los estimadores mínimos cuadráticos del modelo son:

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$$

$$\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}$$

$$\hat{B}_k = \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}$$

Con los estimadores se halla las sumas de cuadrados de las fuentes de variación:

$$SC\ (\text{bloques}) = \sum_k (2)(2)\,\hat{B}^2_k$$

$$SC\ (\text{factor A}) = \sum_i (2)(5)\,\hat{\alpha}^2_i$$

$$SC\ (\text{factor B}) = \sum_j (2)(5)\,\hat{\beta}^2_j$$

$$SC\ (\text{interacción AB}) = \sum_i\sum_j (5)\widehat{(\alpha\beta)}^2_{ij}$$

Con los datos:

Nro de bloques = r = 5
Niveles de A = a = 2
Niveles de B = b = 2

Las sumas de cuadrados quedan simplificadas en:

Término de corrección = $Y^2_{...}/(abr) = Y^2_{...}/20$

$SC(A) = \sum Y^2_{i..}/(br) - TC = \sum Y^2_{i..}/10 - TC$

$SC(B) = \sum Y^2_{.j.}/(ar) - TC = \sum Y^2_{.j.}/10 - TC$

$SC(AB) = (\sum\sum Y^2_{ij.}/r - TC) - SC(A) - SC(B)$

$SC(AB) = (\sum\sum Y^2_{ij.}/5 - TC) - SC(A) - SC(B)$

La suma de cuadrados de tratamientos, llamada también suma de cuadrados del combinado AB, resulta:

$SC(tratamiento) = \sum\sum Y^2_{ij.}/r - TC$

Como SC(tratamiento) = SC(A) + SC(B) + SC(AB), entonces

SC(AB) = SC(tratamiento) -SC(A) - SC(B) ó

SC(AB) = SC(combinado AB) -SC(A) - SC(B)

$SC(bloques) = \sum_k Y^2_{..k} /(ab) - TC = \sum_k Y^2_{..k} /4 - TC$

$SC(Total) = \sum_{i\,j\,k}\sum\sum Y^2_{ijk} - TC$

SC(Error) = SC(total) - SC(bloques) - SC(Tratamiento)

Los grados de libertad se encuentra según el diseño empleado. La fuente de variación debido a tratamientos se descompone en fuentes de variación debido a los efectos de A, B y AB. Los grados de libertad de tratamientos se descompone en grados de libertad de A, B y AB.

Trat.	= ab-1 = 4-1	= 3
A	= a-1 = 2-1	= 1
B	= b-1 = 2-1	= 1
AB	= (a-1)(b-1)	= 1
Bloques	= r-1 = 5-1	= 4
Error	= (ab-1)(r-1)	= 12

Para el ejemplo, si la suma de cuadrados de bloques es de 1024.16, la suma de cuadrados del total de 2358.67, y los totales de cada tratamiento:

$a_1b_1 = 45 \qquad a_2b_1 = 110$

$a_1b_2 = 96 \qquad a_2b_2 = 140$

Entonces:

$$SC(Trat.) = \frac{45^2 + 96^2 + 110^2 + 140^2}{5} - \frac{391^2}{20} = 944.15$$

SC(error) = SC(total) - SC(bloques) - SC(tratamientos)

SC(error) = 390.36

$$SC(A) = \frac{(45+96)^2 + (110+140)^2}{10} - \frac{391^2}{20} = 594.05$$

$$SC(B) = \frac{(45+110)^2 + (96+140)^2}{10} - \frac{391^2}{20} = 328.05$$

SC(AB)= 944.15 - 594.05 -328.05 = 22.05

Otro método para determinar la suma de cuadraqdos, es mediante CONTRASTES ORTOGONALES.

DESCOMPOSICION ORTOGONAL

La suma de cuadrados de tratamientos se descompone en la SC(A) + SC(B) + SC(AB). Mediante Contrastes ortogonales se determinan las sumas de cuadrados, así:

	Tratamientos						
FUENTE	a1b1	a1b2	a2b1	a2b2	EFECTO	DIVISOR	SC()
A	-	-	+	+	109	20	594.05
B	-	+	-	+	81	20	328.05
AB	+	-	-	+	-21	20	22.05
	45	96	110	140			

Los signos se colocan según el nivel; nivel (1) signo (-), nivel (2) signo (+) para los efectos principales. La fila de la interacción se obtiene multiplicando los signos de dichos factores: (-)(-) = (+) y (-)(+) = (-).

Los totales de tratamientos se colocan en la última fila.

El valor del efecto, se obtiene sumando los totales de los tratamientos con los signos correspondientes a la fila del la fuente de variación.

Efecto en A = - 45 - 96 + 110 + 140 = 109

Efecto en B = - 45 + 96 - 110 + 140 = 81

Efecto AB = + 45 - 96 - 110 + 140 = -21

El valor del divisor corresponde al producto de los bloques por la suma de cuadrados de los coeficientes del contraste. Así para el efecto de A, se tiene:

$$r \sum_i C_i^2 = 5 \left((-1)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 + (+1)^2 \right) = 20$$

Se procede de igual forma para las otras fuentes de variación.

Finalmente las suma de cuadrados se halla por el cociente $(\text{efecto})^2 / (r\sum C_i^2)$
El resultado del ejercicio se muestra en el siguiente cuadro del Análisis de la variancia.

A N V A

FUENTES	GL	SC	CM	F_C	$F_{\hat{A}}$
BLOQUES	4	1024.16	256.04	7.87 *	3.16
TRATAMIENTOS	3	944.15			
A	1	594.05	594.05	18.26 **	9.33
B	1	328.05	328.05	10.08 **	
AB	1	22.05	22.05	0.68 ns	
ERROR	12	390.36	32.53		

CONCLUSIONES

Hay diferencia altamente significativa en el rendimiento de las parcelas a las que se aplicaron control de maleza frente a las que no se aplicaron. Las parcelas que recibieron fertilizante presentan diferencias altamente significativas de las parcelas que no recibieron fertilizante alguno. La formación de Bloques permitió disminuir el error experimental, pues el efecto es significativo.

El coeficiente de variación es de 29.17%, aceptable dentro de los rangos establecidos para experimentos de campo.

Las pruebas de comparación de promedios no son necesarias en este caso, porque cada factor cuenta solamente con 2 niveles. Según el rendimiento promedio de los niveles, se puede afirmar que la fertilización y el control de maleza aumentaron el rendimiento.

Para dar conclusiones más detalladas sobre las combinaciones se deben realizar pruebas sobre grupos de tratamientos seleccionados o pruebas de promedios de tratamientos.

Dado que Los factoriales forman tratamientos, estos pueden ser sometidos a cualquier prueba comparativa, según el interés del investigador, asi por ejemplo plantear contrastes.

Ejercicio. Realizar la prueba de comparación de tratamientos mediante contrastes ortogonales y la prueba de Duncan para los promedios, si los tratamientos son:

T_1 = tratamiento testigo.
T_2 = Se aplica dosis de fertilizante.
T_3 = Se aplica control de maleza.
T_4 = Se aplica control de maleza y fertilizante.

Los promedios son: 9, 19.2, 22, 28 respectivamente.

Número de bloques = 5

CM(error) = 32.53

Contrastes

C_1 : T_1 vs demás tratamientos.
C_2 : T_2 vs T_3, T_4
C_3 : T_3 vs T_4

FACTORIAL DE 2 FACTORES CON 2 O MAS NIVELES.

Para el caso de más de dos niveles, la descomposición de la suma de cuadrados de tratamiento se sugiere obtener con los totales en las formulas de sumas de cuadrados y no por contrastes, porque en contrastes para factores de más niveles se tiene efectos cuadráticos, cúbicos, etc.; para el caso de dos, sólo se tiene efectos lineales y el proceso se simplifica. Por ejemplo un factorial 2A3B, que corresponde a 5 grados de libertad, se tiene:

1.-Efecto lineal de A
2.-Efecto lineal de B
3.-Efecto cuadrático de B
4.-Efecto lineal de A por lineal de B
5.-Efecto lineal de A por cuadrático de B

Para el caso de dos niveles efecto lineal, para tres niveles efecto lineal y cuadrático, cuatro niveles hasta efecto cúbico, etc.

Ejemplo .- Factorial 2A3B con 4 repeticiones, A fijo y B fijo, en un diseño DCA.

a1			a2		
b1	b2	b3	b1	b2	b3
1	4	2	6	1	1
0	3	3	5	1	0
1	5	4	4	2	1
2	5	4	5	2	2

Cuadro de totales:

	b_1	b_2	b_3
a_1	4	17	13
a_2	20	6	4

TC = $64^2/24$ = 170.67

SC(total) = $1^2 + 4^2 + ... + 2^2$ - TC = 73.3333

SC(Combinado AB)=$(4^2 + 17^2 +...+ 4^2)/4$ - TC = 60.8333

SC(error) = diferencia = 12.5

CM(error) = 12.5/18 = 0.69444   CV = 31.25%

Descomposición del combinado AB

SC(A) = $(34^2 + 30^2)/12$ - TC = 0.6667

SC(B) = $(24^2 + 23^2 + 17^2)/8$ - TC = 3.58333

SC(AB)= SC(combinado AB) - SC(A) - SC(B) = 56.58333

ANVA

Fuentes	Gl	SC	CM	Fc	
A	1	0.6667	0.6667	0.96	
B	2	3.5833	1.7916	2.58	
AB	2	56.5833	28.2916	40.74	**
Error	18	12.5	0.6944		

La interacción AB resulta altamente significativa, por lo tanto requiere el análisis de los efectos simples para tener conclusiones del comportamientos de los niveles en consideración al otro factor.

Análisis de los efectos simples.- Se requiere primero calcular las sumas de cuadrados de los efectos simples. El calculo puede hacerse con los totales de las combinaciones de los factores y luego construir el cuadro del ANVA.

Las sumas de cuadrados mediante totales es dado por:

$SC(\ A(b_1)) = (4^2 + 20^2)/4 - 24^2/8 = 32$

$SC(\ A(b_2)) = (17^2 + 6^2)/4 - 23^2/8 = 15.125$

$SC(\ A(b_3)) = (13^2 + 4^2)/4 - 17^2/8 = 10.125$

$SC(\ B(a_1)) = (4^2 + 17^2 + 13^2)/4 - 34^2/12 = 22.166$

$SC(\ B(a_2)) = (20^2 + 6^2 + 4^2)/4 - 30^2/12 = 38$

Notar que utiliza su propio término de corrección, y los denominadores corresponden al número de elementos que intervienen en los totales.

Ejercicio.- (Factorial 3x4). Considere el siguiente experimento : Propagación vegetativa de lúcumo sobre medios artificiales. Se mide la velocidad de formación de callos a la cuarta semana de cultivo. Uno de los factores es la sustancia de crecimiento con niveles :

a_1 = Acido indolacético (AIA)
a_2 = Cinetina (C)
a_3 = Acido naftalenoacético (ANA)

El otro factor es la concentración con niveles:

b_1 = 0.0
b_2 = .1 μM
b_3 = 1.0 μM
b_4 = 10.0 μM

Los resultados del experimento fueron:

Promedios de los niveles de sustancia.:

$\bar{Y}_{1..} = 12.49$

$\bar{Y}_{2..} = 11.33$

$\bar{Y}_{3..} = 6.58$

El número de repeticiones r = 3
Coeficiente de variación CV = 9.76 %
SC (concentración) SC(B) = 1.194
SC (sustancia x concentración) SC(AB) = 9.9

Plantear las hipótesis y construir el cuadro del ANVA. Interpretar y dar conclusiones.

Ref. : TESIS " Propagación vegetativa de lúcumo sobre medios artificiales". Ing. Maria Osorio Bahamonte. Facultad de Agronomía. Universidad Mach. Agraria. Lima-1984.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Factorial 2A3B aplicados en un DBCA con 4 bloques. A y B son fijos.

		a1			a2		
	b1	b2	b3	b1	b2	b3	
I	4	2	6	5	2	8	27
II	5	8	6	6	8	6	39
III	8	7	12	4	6	8	45
IV	10	8	14	6	8	10	56
	27	25	38	21	24	32	167

Totales de tratamiento.

	b1	b2	b3	
a1	27	25	38	90
a2	21	24	32	77
	48	49	70	167

Promedios de tratamientos

	b1	b2	b3
a1	6.75	6.25	9.5
a2	5.25	6	8

a) Dibujar la interacción AB
b) Realizar el ANVA y las pruebas de F.
c) Realizar la prueba de Duncan.

Solución:

a) Gráfico de la interacción.
b) Análisis de la variancia.

Sumas de cuadrados:

TC = $167^2/24$

SC(total) = $4^2 + 2^2 + ... + 10^2$ - TC = 180.95833

SC(bloques) = $(27^2 + 39^2 + 45^2 + 56^2)/6$ - TC = 73.125

SC(A) = (90¨ + 77^2)/12 - TC = 7.041667

SC(B) = $(48^2 + 49^2 + 70^2)/8$ - TC = 38.583333

SC(Combinado AB) = $(27^2+25^2+...+32^2)/4$ - TC= 47.708333

SC(AB) = SC(combinado AB) - SC(A) - SC(B) = 2.083333

SC(error) = diferencia = 60.125

Fuentes	Gl.	SC.	CM.	Fc	Significancia
BLOQUES	3	73.125	24.375	6.08	**
A	1	7.041667	7.041667	1.76	ns.
B	2	38.58333	19.29167	4.81	*
AB	2	2.083333	1.041667	0.26	ns.
Error	15	60.125	4.00833		
Total	23	180.9583			

CV = 28.77244 $\bar{Y}_{..}$ = 6.958333

Se concluye que no existe interacción AB. Los niveles del factor muestran diferencias significativas bajo cualquier combinación de A. los niveles del factor A no muestran diferencias en la combinación con cualquier nivel de B.

d) Prueba de Duncan. Sólo en el factor B, cada nivel tiene 2x4=8 observaciones, éste dato sirve para calcu-lar la desviación estándar de promedios.

CME = 4.008333 $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{4.008333}{8}} = 0.7078$

α = 0.05 gl= 15

valores de p = 2 3
DLS (Duncan) = 2.130 2.234

b_3 = 8.750 a
b_2 = 6.125 b
b_1 = 6.000 b

2. Factorial 2A3B aplicados en un DCA con 4 repeticiones. A y B son fijos.

a1			a2		
b1	b2	b3	b1	b2	b3
2	10	4	8	6	10
5	12	10	6	4	6
8	14	12	9	6	8
7	15	10	8	4	10

Totales de tratamientos.

	b1	b2	b3	
a1	22	51	36	109
a2	31	20	34	85
	53	71	70	194

Promedios de tratamientos

	b1	b2	b3
a1	5.5	12.75	9
a2	7.75	5	8.5

a) Dibujar la interacción AB
b) Realizar el ANVA y las pruebas de F.
c) Realizar las pruebas adicionales según los resultados de b).

Solución:

a) Gráfico de la interacción AB.

b) Análisis de la variancia y la prueba de F.

Fuentes	Gl	SC.	CM.	Fc	Significancia
A	1	24	24	4.72	------
B	2	25.58333	12.79167	2.52	------
AB	2	106.75	53.375	10.5	**
Error	18	91.5	5.08333		
Total	23	247.8333			

CV = 27.89227 $\bar{Y}_{..}$ = 8.083333

La interacción resulta significativa, se procede con el análisis de los efectos simples.

Caso 1) mediante la prueba F.

$SC(A \text{ en } b_1) = (22^2 + 31^2)/4 - 53^2/8 = 10.125$
$SC(A \text{ en } b_2) = (51^2 + 20^2)/4 - 71^2/8 = 120.125$
$SC(A \text{ en } b_3) = (36^2 + 34^2)/4 - 70^2/8 = 0.5$
$SC(B \text{ en } a_1) = (22^2 + 51^2 + 36^2)/4 - 109^2/12 = 105.166$

SC(B en a_2) = (31² + 20² + 34²)/4 - 85²/12 = 27.166

ANVA

Fuentes	Gl	SC.	CM.	Fc	Significancia
A en b1	1	10.125	10.125	1.99	ns
A en b2	1	120.125	120.125	23.63	**
A en b3	1	0.5	0.5	0.09	ns
B en a1	2	105.166	52.583	10.34	**
B en a2	2	27.166	13.583	2.67	ns
Error	18	91.5	5.083		

Estos resultados indican que el factor A tiene diferencias altamente significativas solo cuando se combina con el nivel b_2, los niveles del factor B son diferentes cuando se combina con el nivel a_1, lo que no ocurre con el nivel a_2.

Caso 2) mediante la prueba de DLS (t-student)

$S_d = \sqrt{\frac{2*5.083}{4}} = 1.59$ gl = 18, $t_{0.05}(18) = 2.101$

DLS = (S_d) $t_{0.05}(18)$ = 1.59x2.101 = 3.341

Para los casos A(B): efectos simples de A en B

A(b_1) a_1 = 5.5 a |
  a_2 = 7.75 a |

A(b_2) a_1 = 12.75 a
  a_2 = 5.0 b

A(b_3) a_1 = 9.0 a |
  a_2 = 8.5 a |

Se concluye que sólo en la combinación A con b_2, este muestra diferencias, resultando la mejor combinación a_1b_2.

Para los casos B(A): efectos simples de B en A

B(a_1)	b_2 = 12.75 a	B(a_2)	b_3 = 8.50 a
	b_3 = 9.00 b		b_1 = 7.75 ab
	b_1 = 5.50 c		b_2 = 5.00 b

Estos resultados confirman los resultados del ANVA de efectos simples. Resulta que el factor B muestra diferencias sólo cuando se combina con el nivel a_1; siendo la mejor combinación a_1b_2.

Se llega a los mismos los resultados que en las pruebas anteriores.

Programacion en R.

Ejemplo #1

Datos: crear el archivo con notepad "f2x3.txt"

```
A   B   bloque  Y
a1  b1  1   4
a1  b2  1   2
a1  b3  1   6
a2  b1  1   5
a2  b2  1   2
a2  b3  1   8
a1  b1  2   5
a1  b2  2   8
a1  b3  2   6
a2  b1  2   6
a2  b2  2   8
a2  b3  2   6
a1  b1  3   8
a1  b2  3   7
a1  b3  3   12
a2  b1  3   4
a2  b2  3   6
a2  b3  3   8
a1  b1  4   10
a1  b2  4   8
a1  b3  4   14
a2  b1  4   6
a2  b2  4   8
a2  b3  4   10
```

Ejecutar en la consola de R.

```
> library(agricolae)
> datos <- read.table("f2x3.txt",header=TRUE)
> datos[,3]<-as.factor(datos[,3])
> modelo <- aov(Y~bloque+A+B+A:B,data=datos)
> anova(modelo)

Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
bloque     3 73.125  24.375  6.0811 0.006429 **
A          1  7.042   7.042  1.7568 0.204864
B          2 38.583  19.292  4.8129 0.024281 *
A:B        2  2.083   1.042  0.2599 0.774549
Residuals 15 60.125   4.008
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

> gl<- df.residual(modelo)
> cm<- deviance(modelo)/gl
> attach(datos)
> compara<-LSD.test(Y,B,gl,cm)
```

```
> cv.model(modelo)

[1] 28.77244

Study:

LSD t Test for Y
                              ......
Alpha                         0.050000
Error Degrees of Freedom 15.000000
Error Mean Square             4.008333
Critical Value of t           2.131450

Treatment Means
   B     Y   std.err replication
1 b1 6.000 0.7319251           8
2 b2 6.125 0.9342205           8
3 b3 8.750 1.0648608           8

Least Significant Difference 2.133669
Means with the same letter are not significantly different.

Groups, Treatments and means
a        b3      8.75
 b       b2      6.125
 b       b1      6
```

Ejemplo #2

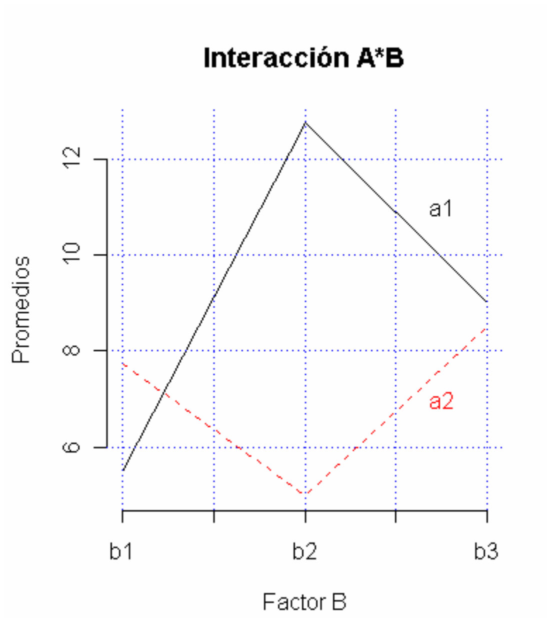
Datos: crear el archivo con notepad “f2ax3b.txt”

```
A   B   bloque  Y
a1  b1  1   2
a1  b2  1   10
a1  b3  1   4
a2  b1  1   8
a2  b2  1   6
a2  b3  1   10
a1  b1  2   5
a1  b2  2   12
a1  b3  2   10
a2  b1  2   6
a2  b2  2   4
a2  b3  2   6
a1  b1  3   8
a1  b2  3   14
a1  b3  3   12
a2  b1  3   9
a2  b2  3   6
a2  b3  3   8
a1  b1  4   7
a1  b2  4   15
a1  b3  4   10
a2  b1  4   8
a2  b2  4   4
a2  b3  4   10
```

```
> library(agricolae)
>
> datos <- read.table("f2ax3b.txt",header=TRUE)
> datos[,3]<-as.factor(datos[,3])
> modelo <- aov(Y~A+B+A:B,data=datos)
> anova(modelo)


Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
A          1  24.000  24.000  4.7213 0.0433881 *
B          2  25.583  12.792  2.5164 0.1087262
A:B        2 106.750  53.375 10.5000 0.0009503 ***
Residuals 18  91.500   5.083
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

> cv.model(modelo)
[1] 27.89227

> gl<- df.residual(modelo)
> cm<- deviance(modelo)/gl
> a.b1<-subset(datos,datos[,2]=="b1")
> a.b2<-subset(datos,datos[,2]=="b2")
> a.b3<-subset(datos,datos[,2]=="b3")
> b.a1<-subset(datos,datos[,1]=="a1")
> b.a2<-subset(datos,datos[,1]=="a2")
> attach(a.b1)
> compara<-LSD.test(Y,A,gl,cm)

Study:

LSD t Test for Y
                                ......
Alpha                         0.050000
Error Degrees of Freedom 18.000000
Error Mean Square             5.083333
Critical Value of t           2.100922

Treatment Means
   A    Y   std.err replication
1 a1 5.50 1.3228757           4
2 a2 7.75 0.6291529           4

Least Significant Difference 3.349417
Means with the same letter are not significantly different.

Groups, Treatments and means
a         a2      7.75
a         a1      5.5
```

```
> attach(a.b2)
> compara<-LSD.test(Y,A,gl,cm)

Study:

LSD t Test for Y
                            ......
Alpha                     0.050000
Error Degrees of Freedom 18.000000
Error Mean Square         5.083333
Critical Value of t       2.100922

Treatment Means
   A     Y   std.err replication
1 a1 12.75 1.1086779           4
2 a2  5.00 0.5773503           4

Least Significant Difference 3.349417
Means with the same letter are not significantly different.

Groups, Treatments and means
a        a1      12.75
 b       a2      5

> attach(a.b3)
> compara<-LSD.grupos(Y,A,gl,cm)

Prueba LSD

Alpha        :   0.05
Gl. Error    :   18
t-Student    :   2.100922
CM del Error :   5.083333
Repetición   :   4
LSD          :   3.349417

Comparación de tratamientos

Grupos, Tratamientos y Promedios
a        a1      9
a        a2      8.5
> attach(b.a1)
> compara<-LSD.grupos(Y,B,gl,cm)

Prueba LSD

Alpha        :   0.05
Gl. Error    :   18
t-Student    :   2.100922
CM del Error :   5.083333
Repetición   :   4
LSD          :   3.349417
```

```
Comparación de tratamientos

Grupos, Tratamientos y Promedios
a        b2      12.75
 b       b3      9
  c      b1      5.5

> attach(b.a2)
> compara<-LSD.grupos(Y,B,gl,cm)

Prueba LSD

Alpha          :   0.05
Gl. Error      :   18
t-Student      :   2.100922
CM del Error   :   5.083333
Repetición     :   4
LSD            :   3.349417

Comparación de tratamientos

Grupos, Tratamientos y Promedios
a        b3      8.5
ab       b1      7.75
 b       b2      5

# Grafico de la interacción
> cuadro<-by(datos[,4],datos[,c(1,2)],function(x) mean(x))
> matplot(t(cuadro),type="l",frame=F,ylab="Promedios",
axes=F,xlab="Factor B", main="Interaccion A*B")
> text(2.75,11,"a1")
> text(2.75,7,"a2",col="red")
> grid(col="blue")
> axis(2)
> axis(1,labels=c("b1","","b2","","b3"))
```



Utilizando las funciones propias de R.

```
> attach(datos)
> interaction.plot(B,A,Y,col=c(1,2))
> grid(col="blue")
```