PROBABILIDAD

Actualmente la teoría de probabilidades desempeña un papel importante en el campo de los negocios, la investigación, específicamente en la toma de decisiones.

Los eventos futuros no pueden predecirse con absoluta seguridad, sólo se puede llegar a aproximaciones de la ocurrencia o no del evento.

Mediante la técnica probabilistica, se halla un valor entre 0 y 1, como la probabilidad de ocurrencia del evento, si el valor es cercano a uno, es casi seguro que ocurrira tal evento

EXPERIMENTO ALEATORIO

Sus respuestas no son predecible, Se caracterizan por:

1. Repeticion del experimento bajo las mismas condiciones.
2. Conocer a priori el conjunto de posibles resultados.

ESPACIO MUESTRAL

Define todo el conjunto de posibilidades.

Cada elemento es un PUNTO DE MUESTRA

EVENTO (SUCESO)

Evento es sinónimo de suceso, constituye un subconjunto del espacio muestral.

Los eventos pueden ser manejados como conjuntos siguiendo las reglas del algebra de conjuntos.

a) A_1 U A_2 (Unión) es el evento que ocurre si y solo si A_1 ó A_2 ocurren , incluye ambos.
b) $A_1 \cap A_2$ (intersección) es el un evento que ocurre si A1 y A_2 ocurren.
c) A_1 ocurre si el complemento de A_1 no ocurre.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

A y B son mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir ambos eventos simultaneamente

Ejemplo. Se realiza el control de calidad sobre cajas de fruta almacenado, se obtiene una muestra de 10 cajas. Se definen los siguientes eventos:

A = { al menos de 1 caja presenta frutos dañados }
B = { Ninguna caja presenta frutos dañados }

$A \cap B$ = conjunto vació

Con estos resultados se afirma que A y B son eventos mutuamente excluyentes, por que nunca ocurrirá simultaneamente ambos eventos.

PROBABILIDAD

La teoría clásica

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(\Omega)}$$

Ejemplo Si en la muestra de 10 cajas, 3 cajas presentan signos de daño, entonces, si se extrae al azar una caja, el resultado puede ser caja sana o caja dañada. Este experimento genera el siguiente espacio Ω:

Ω = { B,B,B,M,M,M,M,M,M,M }

Se define el evento B como Caja buena y el evento D como caja dañada

¿ Cuál es la probabilidad que ocurra B ?

Según el concepto clásico de probabilidad, P(B) sería:

P(B) = 3 /10 = 0.3

Metodo de frecuencia relativa

Se determina la probabilidad de un hecho por experimentos repetidos.

Suponga que el experimento anterior se repite 200 veces, estos resultados podrían ser tabulados como el siguiente cuadro:

Punto de Muestra	Frecuencia Observada	Frecuencia Relativa
B	65	0.325
M	135	0.675

Concepto Subjetivo.

Dar una probabilidad por una apreciacion subjetiva, la corazonada por ejemplo.

La probabilidad Axiomatica

Propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si B es otro evento que es excluyente de A, entonces la probabilidad de A unión B es: $P(AUB)=P(A)+P(B)$

Teorema 1. Si ϕ es el conjunto vacío, entonces $P(\phi) = 0$

Teorema 2. Si A^c es un evento complementario de A, entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorema 3. Si A y B son dos eventos cualesquiera, definidos en Ω, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema 4 Si A es un subconjunto de B definidos en Ω, entonces : $P(A) \leq P(B)$

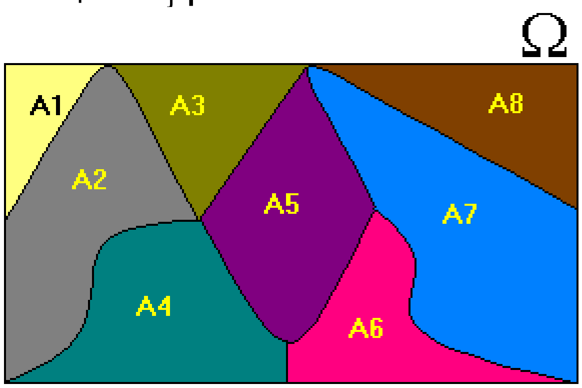
PROBABILIDAD CONDICIONAL

P(A/B) como la probabilidad condicional de la ocurrencia del evento A dado que ya ocurrió el evento B.

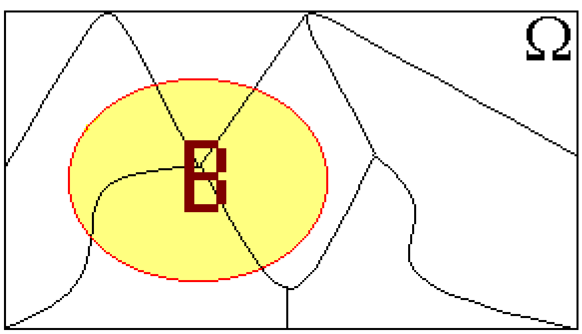
$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ para $P(B) > 0$.

PARTICION DEL ESPACIO MUESTRAL

1. A_i es un evento cualesquiera diferente del vacio.
2. La unión de todos los eventos constituye el evento Ω.
3. $A_i \cap A_j$ para "i" diferente de "j" es un conjunto vacío.



Un evento B puede ser definido en Ω y este puede ser expresado como la unión de $(B \cap A_i)$ para i=1,2....n.



$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Los eventos $(B \cap A_i)$ para i=1,2,..,n son excluyentes y la probabilidad de B (probabilidad total) está dado por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

Dado A_1, A_2, ..., A_n una partición de Ω, y un evento B cualesquiera distinto del vacio, entonces la probabilidad de un evento A_i dado la ocurrencia del evento B, es dado por:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

INDEPENDENCIA ESTADISTICA

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

EJERCICIOS

1. Tres contratistas licitan por un contrato para construir un tramo de la base para que circule el tren eléctrico. Se considera que el contratista A tiene doble probabilidad de obtener el contrato que B y este último el doble de probabilidad del contratista C, para hacerse del contrato. ¿Halle las respectivas probabilidades de los contratista?.

   Solución:

   El espacio Ω estará formado por los siguientes eventos:

   A = Gana el contratista A
   B = Gana el contratista B
   C = Gana el contratista C

   $\Omega = \{A, B, C\}$

   Por definición del problema $P(A) = 2P(B)$; $P(B) = 2P(C)$

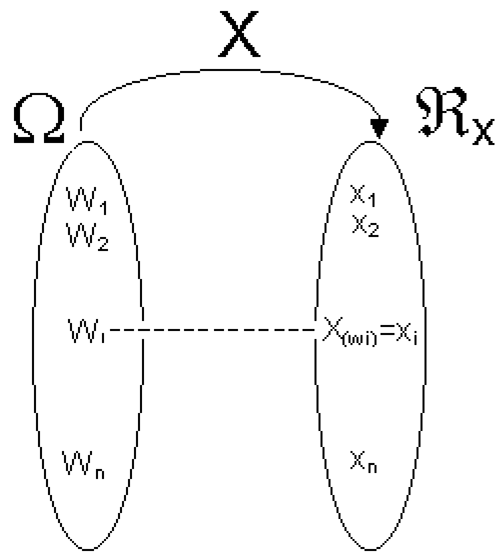
Por una propiedad de la probabilidad
$P(\Omega) = P(A)+P(B)+P(C) = 1$
Resolviendo, se tiene: P(A)=4/7, P(B)= 2/7 y P(C)=1/7

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Definición. Una variable aleatoria es discreta si el número de valores posibles de la variable es un número finito ó infinito numerable.

El dominio de la variable aleatoria X es el espacio muestral Ω y el rango es un subconjunto de números reales denotado por R_x.

En otras palabras, una variable aleatoria es discreta si su rango R_x es un conjunto finito ó infinito numerable.



FUNCION DE PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_x, a esta variable se asocia una función f(x):

$$f(x) = P(X=x) = \sum_{\{wi \in \Omega / X(wi)=x\}} P(\{w_i\})$$

La sumatoria es sobre todos los puntos muestrales (w_i) del espacio muestral Ω, tales que $X(w_i) = x$

La función f(x) define la función de probabilidad o cuantía de la variable aleatoria discreta X, la cual cumple lo siguiente:

(i) $f(x) > 0$ para todo $x \in R_x$

(ii) $\sum_{x \in R_x} f(x) = \sum_{x \in R_x} P(X=x) = 1$

(iii) $f(x) = P(X=x) = 0$, si x no pertenece a R_x

<u>Valor Esperado de una Variable Aleatoria Discreta X: E[X]</u>

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$$

Propiedades :

1. E[k] = k ; k es constante
2. E[X ± a] = E[X] ± a ; a es constante
3. E[aX] = a E[X] ; a es constante
4. E[aX + b] = a E[X] + b ; a,b constantes

Variancia de una Variable Aleatoria Discreta X: V(X)

V(X) = σ^2 = E[(X-E[X])^2] = E[(X-μ)^2]

$$E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{k}(X-\mu)^2 P(X = x_i)$$

ó

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P(X = x_i)$$

Propiedades

1. V(k) = 0
2. V(X ± a) = V[X]
3. V(aX) = a²V(X)
4. V(aX + b) = a²V(X)

k, a, b son constantes.

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Valores posibles de la variable es un número infinito no numerable o cuando el rango de X (R_x) es un intervalo de los números reales.

Ejemplo: Sea X la variable aleatoria que representa la altura de arboles de bolaina.

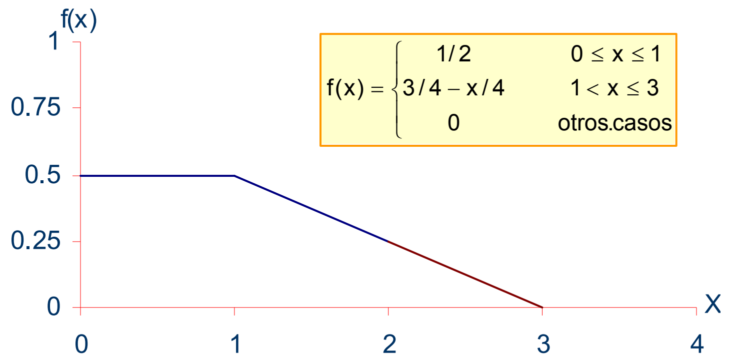
FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES

1. $f(x) \geq 0$ para todo $X \in (-\infty , +\infty)$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 1 \\ 3/4 - x/4 & 1 < x \le 3 \\ 0 & \text{otros.casos} \end{cases}$$



Observe que el área debajo de la curva es igual a la unidad.

ESPERANZA DE UNA V.A. CONTINUA.

Definición .- Sea X una V.A. continua con función de densidad f(x), entonces el valor esperado (media) de la V.A. X se define por:

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f(x)dx$$

Las propiedades para la esperanza de una v.a. continua son las mismas que para la v.a. discreta.

1. E[k] = k
2. E[X ± a] = E[X] ± a
3. E[aX] = a E[X]
4. E[aX + b] = a E[X] + b

k, a, b son constantes

Variancia de una variable aleatoria continua.

X una v.a. continua con función de densidad f(x), la variancia de X se define por:

$$\sigma^2 = V(x) = E\left[(x-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2 = V(x) = E[x^2] - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

1. $V(k) = 0$
2. $V(X \pm a) = V[X]$
3. $V(aX) = a^2V(X)$
4. $V(aX + b) = a^2V(X)$

k, a, b son constantes.

PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DISTRIBUCION BINOMIAL

Una variable binomial se deriva a partir del experimento de Bernoulli.

Pruebas de Bernoulli. Son experimentos que tienen las siguientes características:

1. Para cada prueba se tiene dos resultados posibles, éxito y fracaso (E y F), (la ocurrecia y la no ocurrencia de un evento particular).

   Probabilidad de éxito = p
   Probabilidad de fracaso = q = 1-p

2. El valor de "p" no se altera a través de las repeticiones de la prueba.

3. Las pruebas realizadas son independientes.

Ejemplo: Se examina en laboratorio en placas Petrick los foliolos que producen brotes. Si produce brote es un exito, caso contrario es un fracaso.

En una prueba, la probabilidad de exito p = 1/2 por ejemplo.

Sea la v.a. discreta X: número de foliolos con brote (éxitos)

1ra Prueba	2da Prueba	r ésima Prueba
Ω_1 = {E,F}	Ω_2 = {E,F}	Ω_r = {E,F}
Ω_1 = {C,S}	Ω_2 = {C,S}	Ω_r = {C,S}

Espacio muestral total = $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \quad \times \Omega_r$

Nro de elementos de $\Omega = 2^r$, Ω = { r -adas ordenadas }.

La probabilidad de una r -ada ordenada cualquiera :

P(E,E,F,E,F,...,F,E) = p . p . q . p . q . .. . q . p

$= p^x q^{r-x}$; x = nro de exitos
r-x = nro. de fracasos

La variable Numero de exitos X.

$P(X = x) = \binom{r}{x} p^x q^{r-x}$; x=0,1,2, ..., r

Siendo "r" el número de pruebas de Bernoulli.

Experanza y variancia de una v.a. X que se distribuye como binomial

$E[X] = \mu = rp$
$V(X) = \sigma^2 = rpq$

Ejemplo 1: Una granja debe trasladarse animales de un lugar a otro, la probabilidad de encontrar un animal con un peso mayor de 80 kgr. es de 1/3, y la probabilidad de encontrar un animal con un peso menor de 80 kgrs. es de 2/3. Los animales de la granja son colocados en camiones en un número de cinco por camíon:

a. ¿ Cúal es la probabilidad de encontrar por lo menos 4 animales que pesen menos de 80 kgrs. ?.
b. ¿ Cúal es el número promedio de animales que pesen menos de 80 kgrs. y se encuentren colocados en el camión ?

Solución:

X = Número de animales con un peso inferior o igual a 80 kgr.

$P(X = x) = \binom{5}{x}(2/3)^{x}(1/3)^{5-x}$; x=0,1,2, ..., 5

a) $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5)$

$$P(X \geq 4) = \binom{5}{4}(2/3)^{4}(1/3)^{1} + \binom{5}{5}(2/3)^{5}(1/3)^{0}$$

$P(X \geq 4) = 112/234$

b) E[X] = r p = 5(2/3) = 10/3

DISTRIBUCION DE POISSON

La distribución de Poisson se deduce de un proceso de Poisson o como el límite de la distribución binomial.

Al Proceso de Poisson esta asociado un parámetro λ

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$

x: Número de eventos discretos en "t" unidades de medida.

λ: es el número esperado o promedio de eventos discretos en una unidad de medida.

t: número de unidades de medida

e: 2.71828 (base del logaritmo neperiano)

La variable x así definida es una V.A.D. distribuida como Poisson con la función de probabilidad dada anteriormente.

Casos:

- Número de manchas por metro cuadrado de cierto objeto. Son eventos discretos porque se puede encontrar 0,1,2 ó muchas más manchas en un metro cuadrado. El metro cuadrado es la unidad de medida y es un intervalo continuo porque tiene infinitos puntos.
- El número de tuberculos infectados en un lote.
- El número de vehículos que llegan a una estación de servicio durante una hora en un día determinado. Los eventos son 0, 1, 2,.... vehículos. El intervalo continuo es 1 hora.

Ejemplo. En un lote de un numero no determinado de tuberculos de papa, se requiere hacer un control de calidad, Segun los especialistas indican que la probabilidad es baja de obtener un tuberculo infectado, se estima que de 200 tuberculos examinados se obtenga 2 tuberculos infectados

¿ Cuál es la probabilidad de obtener al menos 1 tuberculo infectado en muestras de 200 tuberculos?.

Solución:

V.A.D. X: número de tuberculos infectados en 200 sigue una distribucion de poisson con tasa igual a 2.

$$P(X = x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2} = 0.86$$

<u>Experanza y variancia de una v.a. X que se distribuye como Poisson</u>

E[X] = μ = λ

V(X) = σ^2 = λ

PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

1. DISTRIBUCION NORMAL

Definición .- Sea X una v.a. continua con media μ y variancia σ^2, luego esta variable se distribuye como variable Normal si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \; ; -\infty < x < +\infty$$

Notación $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Características:

1. La curva f(x) es de forma acampanada y tiene como asíntota el eje de las abscisas.
2. Es simétrica respecto a la recta vertical $X=\mu$
3. Presenta una relación entre media "μ" y desviación estandar σ:

Si $\mu=1$, $\sigma^2=1$; entonces la variable tiene una distribución normal estandar.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL.

$y_n = \dfrac{\bar{x}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, se aproxima a una normal con media 0 y variancia 1

La importancia de este teorema es que nada se dice de la forma de distribución de f(x). Cualquiera que sea la distribución con variancia finita, la media muestral tendra una distribución cercana a la normal cuando la muestra sea grande.

DISTRIBUCION MUESTRAL.

Valor Estadístico.- Es una v.a. que depende de la muestra observada. La distribución del valor estadístico se llama distribución muestral y a la desviación estandar el error estándar.

Distribución muestral de la media ($\bar{x}$)

Si x_1, x_2, ..., x_n es una muestra aleatoria de tamaño "n" de una v.a. X con media μ y variancia σ^2, entonces la distribución de la media muestral es aproximadamente normal con media μ y variancia σ^2/n, para $n \geq 30$.

Esta definición es válida para poblaciones finitas o infinitas, discretas o continuas cuando $n \geq 30$

Si la población tiene distribución normal, la distribución de la media de la muestra es normal para cualquier "n".

Si la muestra es sin reemplazo de una población finita de tamaño "N", entonces:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu ; \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, Factor de corrección para poblaciones finitas

El factor de corrección puede omitirse si $n \geq 30$ ó $n/N \leq 0.01$, en tal caso:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ejemplo. Suponga que se toma una muestra al azar de 10 arboles de pijuayo y se mide su altura. Cual es la probabilidad de que la altura promedio de la muestra supere los 14 metros, si el promedio de la plantacionla vaiancia deeEstime que % de arboles tiene medidas en diametro mas de 15 cm, si la variancia de la muestra es de 3 y su promedio es de 13.

La variancia del promedio es 3/10 = 0.3

Se pide $P(\bar{x} < 82{,}000) = P(Z < (82000 - 80000)/(8000/8))$

$P(\bar{x} < 82{,}000) = P(Z < 2) = 0.9772$

2. DISTRIBUCION CHI-CUADRADO : $X^2_{(v)\ gl}$.

Definicion .- Sea Z_1, Z_2, Z_3, ...Z_v variables aleatorias normales e independientes con media 0 y variancia 1.

La variable definida como : $w = \sum_{i=1}^{v} z_i^2$ es una variable aleatoria que sigue una distribución Chi cuadrado con "v" gl. y la función de densidad dada por:

Características :

1. Distribución continua con tendencia asimétrica hacia la derecha.
2. Los valores de W son positivos.
3. Para cada grado de libertad se tiene una distribución Chi Cuadrado.
4. A medida que aumenta el número de grados de libertad, la distribución tiende a la simetría.

Teorema . "Aditividad de la distribución Chi Cuadrado". Si W_1, W_2,...,W_n son variables aleatorias independientes distribuidas cada una como Chi Cuadrado con v_1, v_2,...,v_n grados de libertad respectivamente, entonces: $W = \Sigma W_i$ se distribuye como Chi Cuadrado con $v = \Sigma v_i$ grados de libertad.

EJERCICIOS

1. Para n=21. $P(X^2 < 37.566) = 0.99$; $P(X^2 > 37.566) = 0.01$

3. DISTRIBUCION "t" DE STUDENT

Definición .- Sea "Z" una v.a. normal estándar y "Y" otra variable distribuida como Chi Cuadrado con "v" grados de libertad. La variable "t" definida como:

$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{y}{v}}}$; Tiene una distribución de student con v gl.

Características .

1. Es una curva simétrica y asintótica, de forma acampanada
2. Alcanza su máxima altura en t=0, donde: $\mu_t = Me_t = Mo_t = 0$
3. Para cada valor de "v" existe una curva de probabilidad.
4. A medida que "v" aumenta, la distribución de "t" se apróxima a la distribución normal estándar.
5. $\mu_t = 0$, v>1
   $\sigma^2_t = v/(v-2)$, v>2

Teorema .- La distribución de probabilidades de la variable t, definida como:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

es una "t" de student con (n-1) grados de libertad.

EJERCICIOS

1. De una población normal con media μ se extrae una muestra de tamaño 16 y variancia muestral de 2.25 ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral difiera de su media poblacional en una cantidad mayor a 0.3247 ?.

   Solución: $P(|\bar{x}-\mu| > 0.3247) = ?$

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sqrt{2.25}}{\sqrt{16}}} \sim t_{(15)gl}$$

$$P\left[\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} > \frac{0.3247}{\sqrt{\frac{2.25}{16}}}\right] = P\left(\left|t_{(15)gl}\right| > 0.866\right)$$

es equivalente a:

$P(t_{(15\ gl)}>0.866) + P(t_{(15\ gl)}<-0.866)=(1-0.8)+0.2$

$P(|t_{(15\ gl)}|>0.866) = 0.4$

4. DISTRIBUCION "F" DE FISHER

Definición .- Sea "W_1" una v.a. distribuida como Chi cuadrado con v_1 grados de libertad y "W_2" otra variable aleatoria con distribución Chi cuadrado con v_2 grados de libertad; independientes, entonces la variable aleatoria "F" definida como:

$$F = \frac{\frac{w_1}{v_1}}{\frac{w_2}{v_2}} \sim F_{(v1,v2)gl} ;$$

significa que sigue una distribución F con gl. v_1 y v2

Características .

1. Continua y asimétrica hacia la derecha
2. Los valores de F son valores positivos, F>0
3. Para cada par de grados de libertad v_1, v_2 se tiene una distribución de F.
4. A medida que aumentan los valores de v_1 y v_2, la curva se hace menos asimétrica.
5. $\mu_F = v_1 /(v_2-2)$ para $v_2 > 2$

   $$\sigma_F^2 = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}; \text{ para } v_2 > 4$$

6. Tiene la propiedad recíproca:

$$F_{(\alpha)(v1,v2)gl} = \frac{1}{F_{(1-\alpha)(v2,v1)gl}}$$

Teorema .- Si de una población normal con media desconocida y variancia σ^2_1 se extrae una muestra de tamaño n_1 cuya variancia es de S^2_1, y de otra población normal también con media desconocida y variancia σ^2_2 se extrae una muestra de tamaño n_2 cuya variancia es de S^2_2 , entonces la variable aleatoria F definido como:

$F = \dfrac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$; se distribuye como F con $v_1=n_1-1$ y $v_2=n_2-1$ gl.

EJERCICIOS

1. Para $n_1=11$ y $n_2=12$; $P(F<2.86) = 0.95$.

   $P(F>2.86) = 1 - P(F<2.86) = 0.05$

   $P(F<4.54) = 0.99$

   $P(F>4.54) = 1 - P(F<4.54) = 0.01$

   $P(2.86 <F<4.54) = 0.99-0.95 = 0.04$