CAPITULO VI

PROBABILIDAD

Actualmente la teoría de probabilidades desempeña un papel importante en el campo de los negocios, específicamente en la toma de decisiones. Los eventos futuros no pueden predecirse con absoluta seguridad, sólo se puede llegar a aproximaciones de la ocurrencia o no del evento, una de las formas de aproximación al resultado de lo que pueda ocurrir, es mediante la técnica probabilistica, mediante esta técnica se encuentra un valor entre 0 y 1, que es la probabilidad y esto nos indicará, si es cercano a uno, es casi seguro que ocurrira tal evento, caso contrario si se aproxima a cero, esto indica que es muy posible que dicho evento no ocurra.

La toma de decisiones puede realizarse bajo las siguientes condiciones:

- Certidumbre
- Riesgo
- Incertidumbre

En condiciones de Certidumbre, la toma de decisiones se realiza bajo el conocimiento exacto del estado natural de las cosas.

En condiciones de riesgo, la toma la decisión se realiza bajo el conocimiento de cierto número de estados de la naturaleza y se conoce las probabilidades de ocurrencia de los estados.

En condiciones de incertidumbre, la toma de decisiones se realiza bajo ciertos criterios de decisión (método de Hurwicz, de Wald y Laplace), en el que se desconocen las probabilidades de los diferentes estados, Thieraut, Robert (6).

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

La Estadística es un instrumento de toma de decisiones ante la incertidumbre y se basa en la teoría de probabilidades. La estadística ingresa al método científico a través de la observación y la experimentación. La mayor parte de las investigaciones científicas son inferencias porque el resultado es incierto, la Estadistica, a través de la probabilidad cuantifica la incertidumbre, constituyendo su aporte más importante al método científico.

EXPERIMENTO ALEATORIO

Los experimentos aleatorios o no determinísticos son modelos de comportamiento del estado natural de las cosas. Estos experimentos se caracterizan por:

1. Es posible repetir el experimento bajo las mismas condiciones.
2. Se conoce a priori el conjunto de posibles resultados, aunque no el resultado del experimento, ser distinto en cada vez, generando un conjunto de resultados.
3. El proceso de repetición y el conjunto generado de resultados, describen un comportamiento que permitirá el estudio del fenómeno aleatorio.

Ejemplos :

E_1: Lanzamiento de una moneda dos veces y se cuenta el numero de caras.
E_2: En la producción del día se contabiliza el total de articulos defectuosos.
E_3: En la primera práctica de Estadistica General se observa el % de desaprobados .
E_4: Durante el día de 8 am. a 4 pm., se mide el tiempo en minutos en las que no se tiene corriente eléctrica en la Universidad Agraria.
E_5: Al termino del primer ciclo académico de un estudiante molinero se observa el número de créditos aprobados.

E_6: Se fabríca una bombilla y se la deja encendida hasta que deje de funcionar.

En todos estos experimentos se observa que el experimento puede ser repetido indefinidamente.

Debe apreciarse que, si estos procesos se repiten indefinidamente, se tendría un comportamiento del estado del fenómeno en estudio.

ESPACIO MUESTRAL

Definición.- Con cada experimento aleatorio "E" se define el espacio muestral como el conjunto de todos los posibles resultados de "E". El espacio muestral es representado con la letra griega omega "Ω".

Para los experimentos descritos, los espacios muestrales asociados serían:

Ω_1: { 0,1,2 }
Ω_2: { 0,1,2,...,N } N es el número máximo producido.
Ω_3: { P / $0 \leq P \leq 100$ } donde P es el porcentaje de desaprobados
Ω_4: { T / $0 \leq T \leq 420$ } T es el tiempo en minutos en las que no se tiene corriente eléctrica.
Ω_5: { 0, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 16, 19 }
Ω_6: { B / $B \geq 0$ } B es el tiempo de duración de la bombilla.

PUNTOS DE MUESTRA

Los resultados posibles de un espacio muestral se llaman puntos de muestra, el número de puntos de muestra de "Ω" es representado por $N(\Omega)$.

Ejemplo 1. Se lanzan juntos dos monedas y se observa el lado superior si es cara o sello; hay cuatro puntos de muestra de Ω:
Ω = {(c,c),(c,s),(s,c),(s,s)}

Ejemplo 2. Se realizan dos manejos agronomicos en campo: Aplicación de fertilizante y control sanitario en las parcelas. En las parcelas puede ocurrir que no se realice ninguna labor o solo se aplica fertilizante o solo control sanitario o ambos. Indique el espacio muestral de las ocurrencias.

En este caso, el espacio muestral esta compuesto de 4 puntos muestrales:

Sin ningun manejo= N
Solo aplicación de fertilizante F
Solo control de sanidad S
Ambos manejos FS

Escriba el espacio muestral

Ω={{N}, {F}, {S}, {FS}}

EVENTO (SUCESO)

Evento es sinónimo de suceso, es un subconjunto del espacio muestral (Ω) formado por resultados del experimento, esto significa que un punto de muestra es un evento. El conjunto vacío (ϕ) constituye también un evento (nulo), significa la no ocurrencia de ninguno de los resultados del experimento.

Ejemplos: para los espacios muestrales definidos:

A_1 : No sale caras en 2 monedas : { (S,S) }
A_2 : al menos 1 cara en 2 monedas : { (C,S), (S,C), (C,C) }
B_1 : Menos de 5 artículos defectuosos : { 0,1,2,3,4 }
B_2 : Más de 10 artículos defectuosos : {11,12,13,.,N }
C_1 : Más del 35 % de desaprobados : { P/35< P $\leq$100}
D_1 : Menos de dos horas sin corriente : { T / T < 120 }

Los eventos pueden ser manejados como conjuntos siguiendo las reglas del algebra de conjuntos, así para una serie de eventos A_1, A_2, A_3,...:

a) A_1 U A_2 (Unión) es el evento que ocurre si y solo si A_1 ó A_2 ocurren , incluye ambos.
b) $A_1 \cap A_2$ (intersección) es el un evento que ocurre si A1 y A_2 ocurren.
c) A_1 ocurre si el complemento de A_1 no ocurre.
d) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y solo si al menos uno de ellos ocurre
e) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ Es el evento que ocurre si y solo si todos los eventos A_i ocurren

Hallar los resultados de a), b),..,e) para los eventos de A y para los eventos de B.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir ambos eventos simultaneamente, la intersección es el conjunto vacío.

Ejemplo. En un puesto de periódicos se observa el tiempo entre un cliente y otro en la compra de un diario. Se define los siguiente eventos:

A = { menos de 10 minutos }
B = { más de 5 y menos de 20 minutos}
C = { más de 15 minutos }

LLega un cliente a los 16 minutos de su antecesor, según este resultado se dice que ocurrio el evento B y tambien el evento C pero no el evento A, sin embargo no se puede decir entre quienes son mutuamente excluyente. Según la definición :

$A \cap B$ = { mas de 5 y menos de 10 minutos }
$A \cap C$ = conjunto vació
$B \cap C$ = { más de 15 y menos de 20 minutos }

Con estos resultados se afirma que A y C son eventos mutuamente excluyentes, por que nunca ocurrirá simultaneamente ambos sucesos, caso contrario se observa en B y C que ocurre según el caso del cliente que llegó a los 16 minutos, esto indica que ocurrio el evento B y también el evento C.

PROBABILIDAD

TEORIA CLASICA A PRIORI

La teoría clásica se basa en el supuesto que en un experimento al azar cada resultado es igualmente probable, es decir cada punto muestral tiene iguales posibilidades de ocurrir.

Entonces, si un evento A tiene n(A) puntos muestrales, y N(Ω) es el total de puntos del espacio muestral entonces la probabilidad de A es igual a:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(\Omega)}$$

Ejemplo Se lanza un dado y se observa el número de puntos que aparece en la cara superior. Este experimento genera el siguiente espacio Ω:

Ω = { 1,2,3,4,5,6 }

Se define el evento B como el número de puntos en la cara superior sea impar y menor de cuatro. entonces el conjunto B esta descrito por: B = { 1,3 }

Primer lanzamiento aparece 2 puntos ; B No ocurrió
Segundo " " 3 puntos ; B Ocurrió
Tercer " " 6 puntos ; B No ocurrió
Cuarto " " 1 punto ; B Ocurrió
Quinto " " 3 puntos ; B Ocurrió

¿ Cuál es la probabilidad que ocurra B ?

Según el concepto clásico de probabilidad, P(B) sería:

P(B) = 2 / 6 = 0.3333

TEORIA CLASICA FRECUENCIAL

El procedimiento de frecuencia relativa es un procedimiento para determinar la probabilidad de un hecho por experimentos repetidos.

Suponga que el experimento anterior se repite 200 veces, estos resultados podrían ser tabulados como el siguiente cuadro:

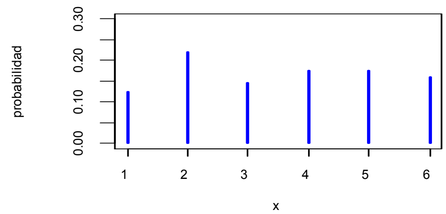
```
> dados <-c(1,2,3,4,5,6)
> set.seed(seed=597)
> x<-dados[sample(1:6,200,replace=T)]
> table(x)
x
 1  2  3  4  5  6
25 44 29 35 35 32

> table(x)/200
x
    1     2     3     4     5     6
0.125 0.220 0.145 0.175 0.175 0.160
```

Ver gráficamente las probabilidades

plot(table(x)/200,col="blue", ylim=c(0,0.3))

Punto de Muestra	Frecuencia Observada	Frecuencia Relativa
1	25	0.125
2	44	0.22
3	29	0.145
4	35	0.175
5	35	0.175
6	32	0.16



Basado en el concepto de la frecuencia relativa, la probabilidad de B estaría dado por:

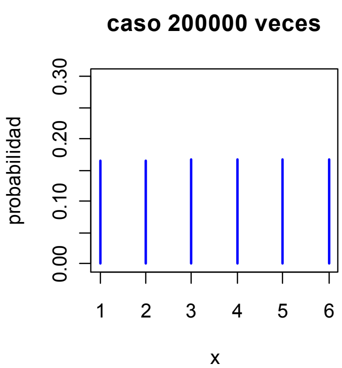
P(B) = 0.125 + 0.145 = 0.27

Esta conduce a lo siguiente: en 200 veces se obtuvo esta frecuencia. Si el experimento se repitiera indefinidamente, los resultados cambiarían naturalmente, esto supone que en la práctica no se puede obtener la probabilidad de un hecho con exactitud, sólo será una aproximación.

El concepto de probabilidad basado en esta teoria define a la probabilidad como el límite, cuando el número de repeticiones tiende al infinito, así: si un experimento se repite n veces y se tiene "x" veces en las que ocurrio el evento B, entonces:

$$P(B) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n}$$

```
> x<-dados[sample(1:6,200000,replace=T)]
> table(x)/200000
x
       1        2        3        4        5        6
0.165410 0.166205 0.167450 0.166520 0.166905 0.167510
> plot(table(x)/200000,col="blue", ylim=c(0,0.3) ,ylab="probabilidad")
>
```



Otro enfoque de la probabilidad es el concepto subjetivo, en el que se considera a la probabilidad como una medida de confianza, un valor entre cero y uno, un caso pesimista y otro optimista. Esta es una forma de ver la probabilidad en el medio de la incertidumbre, por ejemplo en una pelea boxistica, se acostumbra decir para las apuestas 3 a 1, o 4 a 1, la probabilidad de ganar sería en el primer caso de 0.75, otro ejemplo de nuestra realidad es sobre ciertos canditados, que asignan altas probabilidades de salir elegidos. Casos como estos ocurren en medios donde el fenómeno de la incertidumbre hace suponer un valor al resultado, al cual no es posible medir con cierto grado de riesgo y el rango desde lo pesimista a lo optimista hace jugar con este valor como una medida de probabilidad. Otro ejemplo se observa en los juegos del azar o en las carreras de caballos, la corazonada (subjetivo) hace apostar a un caballo con la mejor opción, supone mayor probabilidad.

TEORIA AXIOMATICA DE LA PROBABILIDAD

Definicion.

Sea "E" un experimento, "Ω" un espacio muestral asociado con "E". con cada evento "A" definido en "Ω" se asocia un número real, designado por P(A) al que se le llama la probabilidad de "A" y satisface las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si B es otro evento que es excluyente de A, entonces la probabilidad de A unión B es: $P(AUB)=P(A)+P(B)$
4. Si se tiene "n" o más eventos excluyentes, la probabilidad de la unión de todos es igual a la suma de sus probabilidades de cada evento.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

"n" puede tender al infinito "∞".

Teorema 1. Si ϕ es el conjunto vacío, entonces $P(\phi) = 0$

Demostración : A es un evento diferente del vacío definido en "Ω", la union de A y el evento "vacío" es el mismo evento A y es excluyente ambos eventos (el intercepto es el vacío) entonces:

$P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$; por la propiedad (3).

Por otro lado $A \cup \phi = A$, implica que $P(A \cup \phi) = P(A)$

De ambos resultados resulta que $P(\phi) = 0$

Teorema 2. Si A^c es un evento complementario de A, entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Demostración: El espacio muestral "Ω" puede ser escrito como la unión de estos eventos $\Omega= A^c \cup A$, asi:

$P(\Omega) = P(A^c \cup A) = P(A^c) + P(A)$ por la propiedad (3)

Según la propiedad (2), $P(\Omega)=1$, resulta: $P(A^c)+P(A)= 1$

Así: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorema 3. Si A y B son dos eventos cualesquiera, definidos en Ω, entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración: la unión de A y B se expresa en terminos de otros conjuntos mutuamente excluyentes y luego se aplica la propiedad (3)

$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c)$

Por otro lado se puede observar, según el gráfico, que el evento A puede ser expresado como:

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ {la unión de dos excluyentes}

Por la propiedad (3) se tiene:

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

De ambos resultados, despejando $P(A \cap B^c)$ y reemplazando en la primera expresión se tiene:

$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Teorema 4. Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera de Ω, entonces la probabilidad de la unión de estos esta dado por:

$P(A \cup B \cup C)= P(A) + P(B) + P(C) -P(A \cap B) -P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Este teorema es una extensión del teorema 3.

Teorema 5 Si A es un subconjunto de B definidos en Ω, entonces :

$P(A) \leq P(B)$

Demostración : Si A es un subconjunto de B, implica que
$A \cap B = A$, entonces B puede descomponerse en los siguiente eventos excluyentes:

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Aplicando la propiedad (3)

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

que es equivalente a:

$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Como $P(A^c \cap B) \geq 0$ por la propiedad (2), resulta que:

$P(B) \geq P(A)$ ó $P(A) \leq P(B)$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sean A y B dos eventos asociados a un experimento "E", se define P(A/B) como la probabilidad condicional de la ocurrencia del evento A dado que ya ocurrió el evento B.

Considere que tiene en un bolso 3 monedas de 5 soles y 2 de 10 soles. Se extrae una moneda y luego una segunda moneda. Se definen los siguientes eventos:

A = { moneda de 5 soles en la segunda extracción }
B = { moneda de 10 soles en la primera extracción }

En la primera extracción resultó una moneda de 10 soles, cuál es la probabilidad que en la siguiente extracción resulte una moneda de 5 soles ?.

Se observa que lo solicitado es la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrio B, es decir: P(A/B)

Si en la primera extracción ocurrió B, esto significa que en el bolso quedan 3 monedas de 5 soles y 1 moneda de 10 soles. Aqui la probabilidad solicitada es: 3/4.

Esto se determina del espacio muestral reducido por la ocurrencia del evento B y el nuevo espacio estará formado por $(B \cap \Omega)$ que es el mismo evento B. dentro de este espacio se define el evento A que estará reducido al evento $(A \cap B)$. Entonces la probabilidad solicitada puede ser escrito como:

$P(A/B) = N(A \cap B) / N(B)$

Número de elementos de la intersección dividido por el numero de elementos de B. esto puede ser expresado como la relación de la probabilidad de la intersección y la probabilidad de B.

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ para $P(B) > 0$.

P(A/B) satisface los postulados de probabilidad:

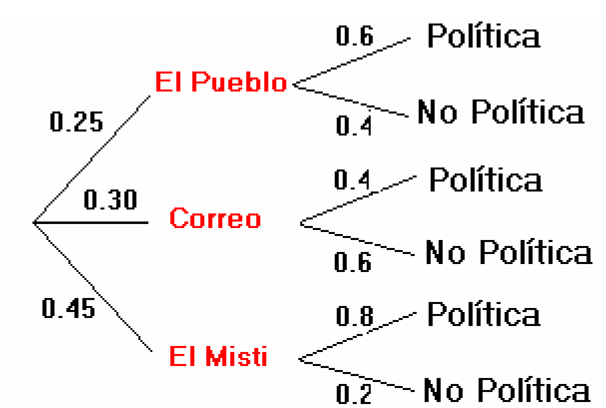
1. $0 \leq P(A/B) \leq 1$
2. $P(\Omega/B) = 1$
3. $P(A1 \text{ U } A2 / B) = P(A1/B) + P(A2/B)$ si $(A1 \cap A2)=$□

De la expresión de probabilidad condicional se desprende las siguiente relaciones:

$P(A \cap B) = P(B)\ P(A/B)$; $P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A)$

conocido como multiplicación de probabilidades.

Ejercicio.- En una ciudad se publican tres periódicos "El Pueblo", "Correo" y "El Misti". Según encuesta en época electoral, el porcentaje de lectores está distribuido en 25%, 30% y 45% respectivamente. A los lectores se les preguntó si estos compran el periódico por el interés político sucitado en el medio o por otros motivos, estos respondieron, por política 60%, 40% y 80% al "El
Pueblo", "Correo" y "El Misti" respectivamente.



Resolver:

a) Probabilidad de que tenga interés político si este compró el diario "El Pueblo".

P(Político / El Pueblo) = 0.6 (dato del problema)

b) Probabilidad de que el lector adquiera el periódico por interés político.

P(Político) = (.25)(.6) + (.3)(.4) + (.45)(.8) = 0.63

c) Probabilidad de que el lector adquiera "El Pueblo" si este compra por interés político.

P(Pueblo/Político)=P(El Pueblo $\cap$ Político)/P(Político)

$$P(\text{Pueblo}/\text{Político}) = \frac{P(\text{Pueblo})P(\text{Político}/\text{Pueblo})}{P(\text{Político})}$$

P(Pueblo/Político) = (0.25)(0.6)/0.63 = 0.2381

d) Probabilidad de que adquiera el "Misti" ó el "Correo".

P(Misti U Correo) = P(Misti) + P(Correo)

Son excluyentes, entonces:

P(Misti U Correo) = 0.30 + 0.45 = 0.75

e) Probabilidad de que adquiera el "Misti" ó el "Correo" si se sabe que el lector no tiene interés político. El "Misti" y el "Correo" son eventos excluyentes, entonces:

P(Misti U Correo /no político) = P(Misti /no político)+ P(Correo /no político)

$$P(\text{Misti}/\text{No.Politico}) = \frac{P(\text{Misti} \cap \text{No.Político})}{P(\text{No.Político})}$$

$$P(\text{Correo}/\text{No.Politico}) = \frac{P(\text{Correo} \cap \text{No.Político})}{P(\text{No.Político})}$$

P(no político) = 1 - P(Político)

P(Misti U Correo /no político) = (0.45)(0.2)/(0.37) +(0.3)(0.6)/(0.37)=0.7297

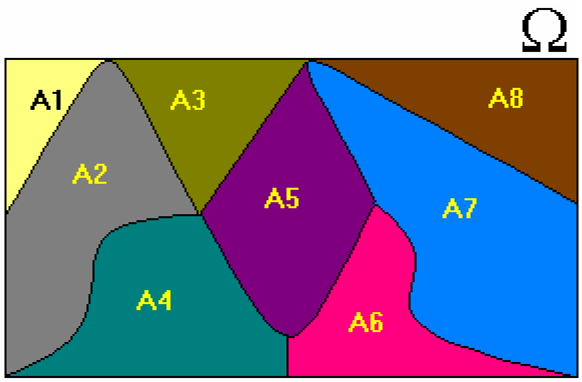
f) Probabilidad de que no tiene interés político si este compró el "Misti"

P(no político / El Misti) = 0.2 (dato del problema)

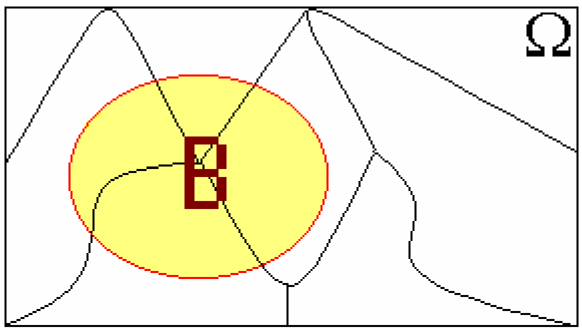
PARTICION DEL ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral Ω puede ser particionado en una serie de eventos mutuamente excluyentes A_1, A_2, ...A_n. Estos eventos constituyen una partición de Ω si cumplen las siguiente condiciones:

1. A_i es un evento cualesquiera diferente del vacio.
2. La unión de todos los eventos constituye el evento Ω.
3. $A_i \cap A_j$ para "i" diferente de "j" es un conjunto vacío.



Un evento B puede ser definido en Ω y este puede ser expresado como la unión de $(B \cap A_i)$ para i=1,2....n.



$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Los eventos $(B \cap A_i)$ para i=1,2,..,n son excluyentes y la probabilidad de B (probabilidad total) está dado por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

Dado $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω, y un evento B cualesquiera distinto del vacio, entonces la probabilidad de un evento A_i dado la ocurrencia del evento B, es dado por:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

Prueba. De la definición de probabilidad condicional:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Por la relación de multiplicación de probabilidades y probabilidad total, se tiene la expresión resultante:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B/A_j)}$$

INDEPENDENCIA ESTADISTICA

Dos eventos definidos en el mismo espacio Ω distintos del vacio, son independientes si y solo si la ocurrencia simultanea de ambos es igual al producto de sus respectivas probabilidades individuales (marginales). Es decir A y B son independientes si y solo si:

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

Esto implica que $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$

Esta definición se extiende a tres o más eventos; asi, si A, B y C son eventos de Ω, estos son mutuamente independientes si satisfacen las siguientes condiciones:

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$
$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$
$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

EJERCICIOS

1. Se interroga a tres lectores sobre la preferencia del candidado presidencial del grupo político LIBERAL, donde las respuestas son favorable (F), desfavorable (D). ¿Cuales son los puntos de la muestra del espacio muestral?. Ulitice el diagrama de árbol.

   Solución:

   Ω = { (F,F,F), (F,F,D), (F,D,F), (F,D,D), (D,F,F), (D,F,D), (D,D,F), (D,D,D) }

2. Tres contratistas licitan por un contrato para construir un tramo de la base para que circule el tren eléctrico. Se considera que el contratista A tiene doble probabilidad de obtener el contrato que B y este último el doble de probabilidad del contratista C, para hacerse del contrato. ¿Halle las respectivas probabilidades de los contratista?.

   Solución:

   El espacio Ω estará formado por los siguientes eventos:

   A = Gana el contratista A
   B = Gana el contratista B
   C = Gana el contratista C

   Ω = {A, B, C}

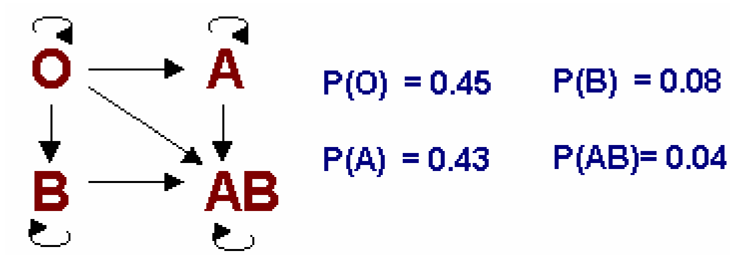
   Por definición del problema $P(A) = 2P(B)$; $P(B) = 2P(C)$

   Por una propiedad de la probabilidad
   $P(\Omega) = P(A)+P(B)+P(C) = 1$
   Resolviendo, se tiene: $P(A)=4/7$, $P(B)= 2/7$ y $P(C)=1/7$

3. Se sabe que existen cuatro grupos sanguíneos y para la transfusión de sangre de una persona a otra hay ciertas compatibilidades basadas en aquellos grupos. En el gráfico se

muestra las proporciones en que los cuatro grupos se reparten en la población y la capacidad de aceptación de los individuos pertenecientes a los diferentes grupos respecto a los posibles donadores.

Teniendo en cuenta estas condiciones y dadas dos pacientes X e Y de las que se



desconoce a que grupo sanguíneo pertenecen, calcular la probabilidades:

a) De que "X" pueda recibir sangre de "Y"

b) De que "X" e "Y" puedan dar y recibir su sangre mutuamente.

c) Se conoce que "X" puede dar sangre a "Y". ¿Cuál es la probabilidad que "Y" no pueda dar sangre a "X"?

Solución:

Cada punto de muestra corresponde a (x,y);

x : tipo de sangre de "X"
y : tipo de sangre de "Y"

a) S_1 : "X" pueda recibir sangre de "Y"

S_1 = {(O,O), (A,O), (A,A), (B,O), (B,B), (AB,O), (AB,A), (AB,B), (AB,AB)}

$P(S_1) = P(O,O) + P(A,O) + ... + P(AB,AB)$

$P(S_1) = (0.45)(0.45)+(0.43)(0.45)+...+(0.04)(0.04)$

$P(S_1) = 0.6633$

b) S_2 : "X" pueda dar y recibir de "Y"

S_2 = {(O,O), (A,A), (B,B), (AB,AB)}

$P(S_2) = P(O,O) + P(A,A) + P(B,B) + P(AB,AB)$

$P(S_2) = (0.45)(0.45)+(0.43)(0.43)+...+(0.04)(0.04)$

$P(S_2) = 0.3954$

c) S_3 : "X" pueda dar sangre a "Y"

S_3 = {(O,O), (O,A), (A,A), (O,B), (B,B), (O,AB), (A,AB), (B,AB), (AB,AB)}

$P(S_3) = 0.6633$

S_4 : "Y" no puede dar sangre a "X"

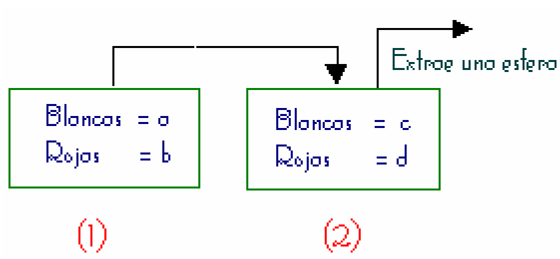
S_4 = { (O,A), (O,B), (O,AB), (A,AB), (B,AB), (A,B), (B,A)}

$S_3 \cap S_4$ = {(O,A), (O,B), (O,AB), (A,AB), (B,AB)}

$P(S_3 \cap S_4)= 0.2679$; $P(S_4/S_3)= 0.2679/0.6633= 0.4039$

4. Una urna (1) contiene "a" esferas blancas e "b" esferas rojas, otra urna (2) contiene "c" esferas blancas y "d" esferas rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna (1) y se pone en la urna (2), luego se escoge una esfera de la urna (2). ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea roja ?.

Solución:



P(roja) = P(roja $\cap$ blanca(1)) + P(roja $\cap$ roja(1))

P(roja) = P(blanca(1)P(roja/blanca(1)) + P(roja(1)P(roja/roja(1))

$$P(\text{roja}) = \left[\frac{a}{a+b}\right]\left[\frac{d}{c+d+1}\right] + \left[\frac{b}{a+b}\right]\left[\frac{d+1}{c+d+1}\right]$$

$$P(\text{roja}) = \frac{ad+bd+b}{(a+b)(c+d+1)}$$

5. Dos tubos defectuosos se confunden con tres buenos. Los tubos se prueban hasta encontrar los defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuosos en la tercera prueba.

b) Cuál es la probabilidad de encontrar los dos tubos defectuosos, uno seguido de otro.

Solución:

Total de tubos = 5

D = defectuoso, B = bueno

a) X = { (D,B,D), (B,D,D) }

P(X) = P(D,B,D) + P(B,D,D)

$P(X) = (2/5)(3/4)(1/3) + (3/5)(2/4)(1/3) = 1/5$

b) $Y = \{ (D,D,B,B,B), (B,D,D,B,B), (B,B,D,D,B), (B,B,B,D,D) \}$

$P(Y) = (2/5)(1/4)(3/3)(2/2)(1/1) + ... + (3/5)(2/4)(1/3)(2/2)(1/1) = 0.40$

6. Probar que si A y B son sucesos independientes, también lo son A y B^c , A^c y B, A^c y B^c.

   Solución:

   A y B son independientes; $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

   ¿ A y B^c son independientes ?

   $A = (A \cap B^c)\ U\ (A \cap B)$ {eventos excluyentes}

   $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A)\ P(B)$

   resulta $P(A \cap B^c)= P(A)-P(A)P(B)= P(A)[1-P(B)]= P(A)P(B^c)$ y son independientes.

   ¿ B y A^c son independientes ?

   $B = (B \cap A^c)\ U\ (A \cap B)$ {eventos excluyentes}

   $P(B) = P(B \cap A^c) + P(A)\ P(B)$

   resulta $P(B \cap A^c)= P(B)-P(A)P(B)= P(B)[1-P(A)]= P(B)P(A^C)$ y son independientes.

   ¿ A^c y B^c son independientes ?

   $(A^c \cap B^c) = (A\ \ U\ B)^c$ { ley de Morgan}

   $P(A^c \cap B^c)= P(A\ \ U\ B)^c= 1 - P(A\ U\ B)= 1 -P(A) -P(B) + P(A \cap B)$

   $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$

   $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) [1-P(A)]$

   $P(A^c \cap B^c) = [1-P(A)][1-P(A)] = P(A^c)\ P(B^c)$ y son independientes.

7. Suponga que A y B son sucesos independientes, asociados a un experimento, la P(AUB) es de 0.6 mientras que la probabilidad de que solamente A ocurra es de 0.2. ¿ Cual es la probabilidad de que solamente B ocurra?.

   Solución:

   $P(AUB) = 0.6$; $P(A \cap B^c) = 0.2$ $P(B \cap A^c) = ?$

   $A\ U\ B = (A \cap B^c)\ U\ (B)$; estos son excluyentes

   $P(A\ \ U\ B) = P(A \cap B^c) + P(B)$

   $0.6 = 0.2 + P(B)$; entonces: $P(B) = 0.4$

También, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Por independencia, $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Resulta : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

se obtiene $P(A) = 1/3$

La probabilidad solicitada

$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2666$

8. Tres componentes de un mecanismo C1, C2 y C3 están colocados en serie. Estos componentes están agrupados en orden aleatorio. Se define los sucesos R={C2 está a la derecha de C1}, T={C3 está a la derecha de C1}. ¿Son estos sucesos independientes?. ¿por qué?.

Solución :

Si son independientes, debe cumplir $P(R \cap T) = P(R)P(T)$

El espacio muestral definido para este caso esta dado por:

$S = \{ (C_1,C_2,C_3), (C_1,C_3,C_2), (C_2,C_1,C_3), (C_2,C_3,C_1), (C_3,C_2,C_1), (C_3,C_1,C_2)\}$

$R = \{ (C_1,C_2,C_3), (C_1,C_3,C_2), (C_3,C_1,C_2)\}$

$T = \{ (C_1,C_2,C_3), (C_1,C_3,C_2), (C_2,C_1,C_3)\}$

La probabilidad de cada punto del espacio muestral es igual a 1/6, por el proceso aleatorio realizado.

$P(R) = 3/6 = 1/2$

$P(T) = 3/6 = 1/2$

$P(R \cap T) = 2/6 = 1/3$

No cumple $P(R)\, P(T) = (1/2)(1/2) = 1/4$ distinto de $P(R \cap T)$

Por lo tanto R y T no son independientes.

9. En la fabricación de cierto artículo se encuentra que se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.05 y defectos de un segundo tipo de 0.1 (se supone independencia entre los tipos de defecto). ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Un artículo tenga ambos defectos
b) Por lo menos tenga un defecto
c) Se sabe que el artículo es defectuoso, hallar la probabilidad que tenga un sólo tipo de efecto.

Solución:

D_1 = defecto del tipo (1)

D_2 = defecto del tipo (2)
$P(D_1) = 0.05$
$P(D_2) = 0.10$

a) $P(D_1 \cap D_2) = (0.05)(0.10) = 0.005$

b) P(por lo menos un defecto)= 1 -P(ningun defecto)

P(por lo menos un defecto)= 1 -$P(D_1^c \cap D_2^c)$

P(por lo menos un defecto)= 1-(0.95)(0.90)= 0.145

por ser eventos independientes.

c) P(defectuoso) = P(por lo menos un defecto) = 0.145

P(un defecto/defectuoso)= P(un defecto $\cap$ defectuoso) / P(defectuoso)

P(un defecto /defectuoso) = P(un defecto) / P(defectuoso)

P(un defecto) = $P(D^c{}_1 \cap D^c{}_2) + P(D_1 \cap D_2) = 0.14$

P(un defecto /defectuoso) = 0.9655

10. Un conjunto electrónico consta de dos sistemas A y B. A partir de una serie de pruebas se determinaron las siguientes probabilidad:

P(B falle) = 0.3
P(A Sólo falle) = 0.2
P(A y B fallen) = 0.15

Calcular las probabilidades de:

a) P(A falle /B haya fallado)
b) P(B falle solamente)
c) P(A no falle / B no fallo)

Solución:

$P(B) = 0.3$; $P(A \cap B^c) = 0.2$; $P(A \cap B) = 0.15$
a) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.15/0.30 = 0.5$
b) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0.30 - 0.15 = 0.15$
c) $P(A^c/B^c) = 1 - P(A/B^c) = 1 - P(A \cap B^c)/P(B^c)$
$P(A^c/B^c) = 1 - 0.2/0.7 = 0.7143$

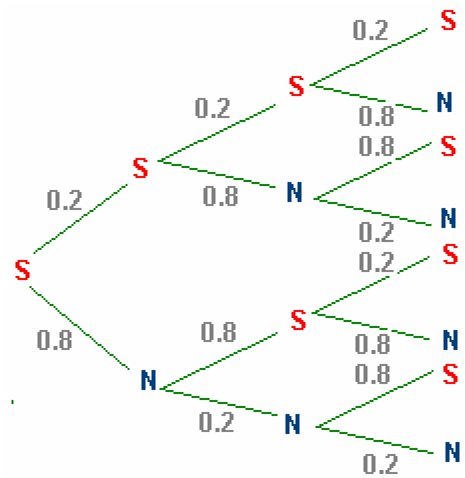
11. Cada vez que se realiza un experimento, la no ocurrencia de un suceso particular A es igual a 0.9. El experimento se repite independientemente hasta que A ocurra. Calcular la probabilidad de que sea necesario realizar un quinto experimento.

Solución:

P(A no ocurra) = $P(A^c) = 0.9$
$P(A) = 0.1$

P(A ocurra en el 5^{to} experimento)= $(0.9)^4(0.1) = 0.0656$

12. Un aficionado usa el siguiente sistema para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica en soleado y nublado. Si un día es soleado, la probabilidad de que sea soleado al siguiente tiene es igual a la probabilidad de que si el día es nublado al siguiente tambien es nublado con una probabilidad de 0.2. ¿ Si un día jueves resulto soleado, ¿cual es la probabilidad que el próximo domingo también lo sea?, y si este fue nublado, que probabilidad existe que el domingo sea soleado?.



Solución:

P(domingo soleado /jueves soleado) = ?

Del diagrama de árbol, la probabilidad solicitada sería dado por el producto de probabilidades de las ramas, que convergen al final en el evento soleado, así:

P(domingo soleado /jueves soleado) = (0.2)(0.2)(0.2) + (0.2)(0.8)(0.8) + (0.8)(0.8)(0.2) + (0.8)(0.2)(0.8)

P(domingo soleado /jueves soleado) = 0.3920

En el caso que el jueves fuese nublado, cambiar las probabilidades de las ramas, el resultado será:

P(domingo soleado /jueves nublado) = 0.6080

13. El problema de energía eléctrica está ocasionando problemas en el normal desarrollo de las actividades de producción y servicio en la Universidad Agraria. El comedor de estudiantes es afectado por energía eléctrica, por un desperfecto en el sistema de calderos ó por otros motivos, en caso normal, la atención es sin problemas. Según observación muestral cuando no se atendió en el comedor, el 70 % de los casos fue por electricidad, el 10% por el sistema de calderos y el 20% por otros motivos y cuando la atención fue normal, un 80% no hubo ningun problema, un 15% habia algún desperfecto en el sistema de calderos, 0% por electricidad y 5% otros motivos. Según las estadísticas la probabilidad de que haya una falla en el sistema de calderos es de 0.12. Los eventos electricidad, calderos, y otros motivos son excluyentes.

a) ¿Cual es la probabilidad de que en un día cualquiera la atención sea normal?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que atiendan en el comedor, a pesar que esta malogrado un caldero?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día no haya corriente eléctrica?.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (5 días hábiles) no haya atención en el comedor, sabiendo que los sucesos por dia son independientes de otros dias?
e) Suponga que el estado del comedor de un dia esta afecto al lo que ocurrio en el día anterior. Es decir la probabilidad que este normal hoy dado que estuvo normal el día de ayer es de 0.3 y la probabilidad de que no haya atencion hoy, dado que ayer tampoco atendieron es de 0.50. Hallar la probabilidad que en la semana la atención sea normal, si el dia lunes es normal.

Solución:

El espacio muestral está definido por los estados atención y no atención del comedor.

Se definen los siguiente eventos que estan relacionados con la atención del comedor.

A_1 : { No hay fluido electrico }
A_2 : { Falla en el sistema de calderos }
A_3 : { Otros motivos que puedan afectar el servicio}
A_4 : { Ningún problema }

Datos:

$P(A_1 / \text{no atención}) = 0.70$
$P(A_2 / \text{no atención}) = 0.10$
$P(A_3 / \text{no atención}) = 0.20$
$P(A_4 / \text{no atención}) = 0.0$
$P(A_1 / \text{atención}) = 0.0$
$P(A_2 / \text{atención}) = 0.15$
$P(A_3 / \text{atención}) = 0.05$
$P(A_4 / \text{atención}) = 0.80$

$P(A_2) = 0.12$

a) $P(\text{atención}) = x$
$P(\text{no atención}) = 1 - x$

Con los datos, se relaciona con la probabilidad total de A_2

$P(A_2) = P(\text{atención} \cap A_2) + P(\text{no atención} \cap A2)$

$P(A_2) = P(\text{atención})\ P(A_2/\text{atención}) + P(\text{no atención})P(A_2/\text{no atencion})$

$0.12 = x\ (0.15) + (1-x)\ (0.10)$

$x = 0.40$ $P(\text{atención}) = 0.40$
$P(\text{no atención}) = 0.60$

b) $P(\text{atención} /A_2)= P(\text{atención} \cap A_2) /P(A_2)$

$P(\text{atención} /A_2)= P(\text{atención})\ P(A_2/\text{atención}) /P(A_2)$

$P(\text{atención} /A_2) = 0.40\ (0.15) = 0.06$

c) $P(A_1)$? , se pide la probabilidad total

$P(A_1) = P(\text{atención} \cap A_1) + P(\text{no atención} \cap A_1)$

$P(A_1) = P(\text{atención})\ P(A_1/\text{atención}) + P(\text{no atención})P(A_1/\text{no atencion})$

$P(A_1) = 0.40\ (0) + 0.60\ (0.70) = 0.42$

d) P(no atención durante cinco días consecutivos) ?

P(no atención) = 0.60

P(no atención durante siete días seguidos)=$(0.60)^5$ el resultado es 0.07776

e) Según el enunciado, las probabilidades definidas son:

P(atención Hoy /atención ayer) = 0.3
P(no atención hoy /no atención ayer) = 0.5

De estas probabilidades se desprende:

P(no atención hoy /atención ayer) = 0.7
P(atencion hoy /no atención ayer) = 0.5

se pide la probabilidad que a fin de semana se tenga atención normal.

Lunes	: atención normal
Martes	: atención normal/ normal el lunes)
Miercoles	: Atención normal/ normal el martes)
Jueves	: Atención normal/ normal el miercoles)
Viernes	: Atención normal/ normal el jueves)

La probabilidad solicitada es expresada por el producto:

P(atención lunes) P(atencion martes/atenciónlunes) ...P(atención viernes/atención jueves)

P(atención continua)= 1(0.3)(0.3)(0.3)(0.3)=0.0081