METODOS DE RUNGE KUTTA

Los métodos de Runge-Kutta (RK) logran una exactitud del procedimiento de una serie de Taylor, sin requerir el cálculo de derivadas superiores.
Probablemente uno de los procedimientos más difundidos, y a la vez más exactos, para obtener la solución numérica del problema de valor inicial:
$y' = f(t,y)$, con $y(to) = yo$, sea el método de Runge- Kutta de cuarto orden.
Los métodos de Runge Kutta de cualquier orden se deducen mediante el desarrollo de la serie de Taylor de la función $f(t,y)$. Existen muchas variaciones, las cuales tienen la forma: $\mathbf{y_{i+1} = y_i + h\,(a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n)}$,

donde las $\mathbf{a_i}$ son constantes y las k son:

$k_1 = f(t_i, y_i)$
$k_2 = f(t_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$
$k_3 = f(t_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$
…
$k_n = f(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

Notamos que los k son relaciones recursivas, es decir, para determinar k_2, necesitamos k_1; para determinar k_3 se necesita k_2, etc

1

A continuación mencionaremos el teorema de taylor, el cual será usado para la obtención de los métodos de Runge Kutta.

TEOREMA DE TAYLOR PARA FUNCION DE DOS VARIABLES

Sea f(t,y) una función de dos variables tal que todas las derivadas parciales de orden n+1 sean continuas en el rectángulo $R = \{(t,y) / |t-a| \le h; |y-b| \le k\}$, entonces existe un número $\theta \in <0, 1>$ tal que:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(a,b) + E_n(h,k)$$

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k);$$

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \frac{1}{1!}(h\, f_t(a,b) + k\, f_y(a,b)) + \frac{1}{2!}\{h^2 f_{tt}(a,b)$$

$$+2hk\, f_{ty}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)\} + \ldots$$

2

METODOS DE RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Dado el problema de v.i. : $y' = f(t,y)$, con $y(t_0) = y_0$ (*)

Aplicando la serie de Taylor para $y(t + h)$:
$y(t + h) = y(t) + h\, y'(t) + h^2 y''(t)/2 + h^3 y'''(t)/6 + \ldots$ (1)

De la ecuación(*), tenemos:
$y'(t) = f$
$y''(t) = f_t + f_y\, y' \Rightarrow y''(t) = f_t + f_y\, f$
$y'''(t) = f_{tt} + f_{ty}\, f + (f_t + f_y\, f)\, f_y + f\,(f_{yt} + f_{yy}\, f)$

Los tres primeros términos de la ecuación (1) se puede escribir como:
$y(t + h) = y(t) + h\, f + h^2 (f_t + f_y\, f)/2 + O(h^3)$
$= y(t) + f + h(f + h\, f_t + h\, f_y\, f)/2 + O(h^3)$ (2)

3

Para eliminar las derivadas parciales, aplicaremos la serie de Taylor a la función $f(t,y)$ de dos variables:
$f(t + h, y + h\, k_1) = f(t, y) + h\, f_t\,(t, y) + h\, f(t,y)\, f_y\,(t, x) + O(h^2)$; donde $k_1 = f(t,y)$

De esto, la ecuación (2), se puede escribir:
$y(t + h) = y(t) + hf/2 + h(f(t + h, y + h) + O(h^2))/2 + O(h^3)$, equivalentemente:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) \qquad (2')$$

donde: $k_1 = f(t_i, y_i)$

$k_2 = f(t_i + h, y_i + h\, k_1)$

Este método se conoce como el método de Runge-Kutta de segundo orden.
También se conocen como el **METODO DE HEUN**.

4

Generalmente las fórmulas de Runge-Kutta de segundo orden adoptan la forma:

$y(t+h) = y(t) + w_1 h\, f(t,y) + w_2 h\, f(t+\alpha h,\, y + \beta\, h\, f(t, y)) + O(h^3)$ (3)

donde w_1, w_2, α, β son parámetros a nuestra disposición.

Aplicando la serie de Taylor de dos variables para la $f(t+\alpha h,\, y+\beta\, h\, f(t, y))$ en la ecuación (3) se puede reescribir:

$y(t + h) = y(t) + w_1 h\, f(t,y) + w_2 h[f(t,y)+ \alpha\, h\, f_t(t, y)+\beta\, h\, f(t, y)\, f_y(t, y)] + O(h^3)$ (4)

Al comparar (2) con (4), tenemos: $w_1 + w_2 = 1$ (5)

$w_2\, \alpha = ½$

$w_2\, \beta = ½$

Una solución es $w_1 = w_2 = ½$; $\alpha=\beta = 1$, que corresponde al método de Heun de la ecuación (2`) . El sistema de ecuaciones (5) poseen otras soluciones, como por ejemplo: w1 =0, $w_2 = 1$; $\alpha= \beta = ½$. La fórmula que se obtiene a partir de (3) se conoce como el **método de euler modificado**[1]:

$y(t + h) = y(t)+k_2$, o equivalentemente:

5

[1] En alguno libros, este método, se conoce como el método del punto medio.

$y(t + h) = y(t)+k_2$, o equivalentemente:

$$y_{i+1} = y_i + h\, k_2 \quad (4´)$$

donde: $k_1= f(t_i, y_i)$, $k_2 = f(t_i + h,\, y_i + hk_1/2)$

6

METODOS DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Probablemente uno de los procedimientos más difundidos, y a la vez, más exacto para obtener soluciones aproximadas del problema: $y' = f(t,y)$, con $y(t_0) = y_0$, sea el método de Runge Kutta de cuarto orden

Así, como en el método de R.K. de segundo orden hay un número infinito de versiones, en el método de RK de cuarto orden existen infinitas versiones. Una de las versiones es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde: $k_1 = f(t_i, y_i)$
$k_2 = f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2)$
$k_3 = f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2)$
$k_4 = f(t_i + h, y_i + h k_3)$

7

Ejemplo: Usando el método de RK4 clásico, con h=1, estimar y(2) en el P.V.I:
$y' = 2\,t\,y + t$, con $y(0) = 0.5$, en el intervalo [0,2]

Solución: Identificando: $f(t,y) = 2\,t\,y + t$; $t_0 = 0$; $y_0 = 0.5$; $h = 1$

Iteración1: $y_1 = y_0 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

$k_1 = f(t_0;y_0) = f(0;0.5) = 2\times \mathbf{0} \times \boldsymbol{0.5} + \mathbf{0} = 0 + 1 - 1 = 0$

$k_2 = f(t_0+h/2;y_0+h\,k_1/2) = f(0.5;\,0.5) = 2\times \mathbf{0.5} \times \boldsymbol{0.5} + \mathbf{0.5} = 1$

$k_3 = f(t_0+h/2;y_0+h\,k_2/2) = f(0.5;1) = 2\times \mathbf{0.5} \times \boldsymbol{1} + \mathbf{0.5} = 1.5$

$k_4 = f(t_0+h,y_0 + h\,k_3) = f(1;\,2) = 2\times \mathbf{1} \times \boldsymbol{2} + \mathbf{1} = 5$

$y_1 = y_0 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = \mathbf{0.5} + 1(\mathbf{0} + 2\times\mathbf{1} + 2\times\mathbf{1.5} + \mathbf{5})/6$

$= 2.16667$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1$

8

$y_1 = 2.16667$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1$

Iteración2: $y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = f(t_1, y_1) = f(1; 2.16667) = 5.33333$
$k_2 = f(t_1 + h/2, y_1 + hk_1/2) = f(1.5; 4.83333) = 16.$
$k_3 = f(t_1 + h/2, y_1 + h\,k_2/2) = f(1.5, 10.1667) = 32.$
$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + hk_3) = f(2; 34.1667) = 138.667$

$y_2 = \mathbf{2.16667} + (\mathbf{5.33333} + 2\times\mathbf{16.} + 2\times\mathbf{32.} + \mathbf{138.667})$

$= 42.1667$

$t_2 = t_1 + h = 1 + 1 = 2$

Por lo tanto, $y(2) \approx y(t_2) = 42.1667$

Finalmente, $y(2) \approx 42.1667$

9

Comparación las aproximaciones de $y' = 2\,t\,y + t$, con $y(0)=0.5$, en el intervalo [0,2], obtenidas con el método de Runge Kutta de orden 4 (clásico) para diferentes tamaños de paso

t	yaprox	yexacta
0	0.5000	0.5000
1.0000	2.1667	2.2183
2.0000	42.1667	54.09820

t	yaprox	yexacta
0	0.5000	0.5000
0.5000	0.7839	0.7840
1.0000	2.2131	2.2183
1.5000	8.8724	8.9877
2.0000	51.5849	54.0982

t	yaprox	yexacta
0	0.5000	0.5000
0.2500	0.5645	0.5645
0.5000	0.7840	0.7840
0.7500	1.2550	1.2551
1.0000	2.2179	2.2183
1.2500	4.2685	4.2707
1.5000	8.9760	8.9877
1.7500	20.8212	20.8809
2.0000	53.7907	54.0982

t	yaprox	yexacta
0	0.5000	0.5000
0.1000	0.5101	0.5101
0.2000	0.5408	0.5408
0.3000	0.5942	0.5942
0.4000	0.6735	0.6735
0.5000	0.7840	0.7840
0.6000	0.9333	0.9333
…	…..	….
1.7000	17.4918	17.4933
1.8000	25.0307	25.0337
1.9000	36.4601	36.4661
2.0000	54.0863	54.0982

10

Tabla Comparativa de los métodos de: Euler, Taylor de cuarto orden, Runge Kutta de orden 4 clásico, en la solución de la ecuación $y' = 2\,t\,y + t$, con $y(0) = 0.5$, en el intervalo [0,2]

t	euler	Taylor4	RK4	y exacta
0	0.5	0.5	0.5	0.5
0.5	0.5	0.78125	0.783854	0.784025
1.	1.	2.17261	2.21314	2.21828
1.5	2.5	8.49221	8.87236	8.98774
2.	7.	47.4819	51.5849	54.0982

t	euler	Taylor4	RK4	y exacta
0	0.5	0.5	0.5	0.5
0.2	0.5	0.5408	0.540811	0.540811
0.4	0.58	0.673414	0.67351	0.673511
0.6	0.7528	0.932998	0.933321	0.933329
0.8	1.05347	1.39556	1.39644	1.39648
1.	1.55058	2.21586	2.21811	2.21828
1.2	2.37082	3.71429	3.71999	3.7207
1.4	3.74881	6.58191	6.5966	6.59933
1.6	6.12814	12.3865	12.4256	12.4358
1.8	10.3702	24.8874	24.9955	25.0337
2.	18.1967	53.6405	53.9539	54.0982

11

Tabla Comparativa de los métodos de: Euler, Taylor de cuarto orden, Runge Kutta de orden 4 clásico, en la solución de la ecuación $y' = 2\,t\,y + t$, con $y(0) = 0.5$, en el intervalo [0,2]

t	euler	Taylor4	RK4	y exacta
0	0.5	0.5	0.5	0.5
0.1	0.5	0.51005	0.51005	0.51005
0.2	0.52	0.540809	0.540811	0.540811
0.3	0.5608	0.59417	0.594174	0.594174
0.4	0.624448	0.673503	0.673511	0.673511
0.5	0.714404	0.78401	0.784025	0.784025
0.6	0.835844	0.933303	0.933329	0.933329
0.7	0.996146	1.13227	1.13232	1.13232
0.8	1.20561	1.39641	1.39648	1.39648
0.9	1.4785	1.74779	1.7479	1.74791
1.	1.83463	2.21809	2.21827	2.21828
1.1	2.30156	2.85317	2.85346	2.85348
1.2	2.9179	3.72018	3.72065	3.7207
1.3	3.7382	4.91863	4.91938	4.91948
1.4	4.84013	6.59791	6.59912	6.59933
1.5	6.33537	8.98534	8.98734	8.98774
1.6	8.38598	12.4317	12.435	12.4358
1.7	11.2295	17.4862	17.4918	17.4933
1.8	15.2175	25.0213	25.0307	25.0337
1.9	20.8758	36.4439	36.4601	36.4661
2.	28.9986	54.0583	54.0863	54.0982

12

RESUMEN

Para resolver la ecuación diferencial: y' = f(t,y); con y(t0)=y0, se tiene los siguientes métodos numéricos de un paso:

a) Método de Euler: $y_{i+1} = y_i + h\ f(t_i, y_i)$; $t_{i+1} = t_i + h$

b) Método de Euler mejorado:

$$y_{i+1} = y_i + h\ K_2;$$
$$K_1 = f(t_i, y_i)$$
$$K_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h\,K_1)$$
$$t_{i+1} = t_i + h$$

13

c) Método de Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2]$$
$$K_1 = f(t_i, y_i)$$
$$K_2 = f(t_i + h, y_i + h\,K_1)$$

d) Método de Runge-Kutta Clásico:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$
$$K_1 = f(t_i, y_i)$$
$$K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$$
$$K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2)$$
$$K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_3)$$

14