Problemas Resueltos

1. La distribución de la temperatura en una placa metálica, viene dada por la función: $T(x,y)=\dfrac{70}{1+x^2+3y^2+2z^2}$, donde T está medida en grados centígrados y *x,y,z* en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto al punto(1, 3,2)? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento ?

Solución

Se sabe que la gradiente de T es la dirección en la cual aumenta más rápido la temperatura. más rápido

El gradiente de T es:

∇ f(x,y,z) = < f_x (x,y,z), f_y (x,y,z), f_z (x,y,z) >

$$= < \frac{-140x}{(1+x^2+3y^2+2z^2)^2}, \frac{-210y}{(1+x^2+3y^2+2z^2)^2}, \frac{-480x}{(1+x^2+3y^2+2z^2)^2} >$$

$$\nabla f(1,3,2) =< \frac{-140}{1369}, \frac{-630}{1369}, \frac{-560}{1369} >$$

La tasa máxima de crecimiento es la longitud del vector gradiente.

$$|\nabla f(1,3,2)| = \frac{70\sqrt{149}}{1369}$$

2. Resolver la ecuación: $y^5 e^{2x} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

Solución:

$$y^5 e^{2x} + \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^5 e^{2x}$$

$\Leftrightarrow$ dy = - $y^5 e^{2x}$ dx $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{y^5}$ dy = - e^{2x} dx (se logrado separar la variables)

Integrando cada término: $\displaystyle\int \frac{1}{y^5}dy = -\int e^{2x}\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{4y^4} = -\frac{e^{2x}}{2} + c$

3. Resolver la ecuación: $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$

Solución Veamos si la EDO es homogénea:

$$\left.\begin{array}{l} P(x, y) = x^3 + y^3 \\ \\ P(tx, ty) = (t x)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 P(x,y) \end{array}\right\} \text{P es homogénea de grado 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(x, y) = 3 x y^2 \\ \\ Q(tx, ty) = 3 (t x)(t y)^2 = t^3(3x y^2) = t^3 Q(x, y) \end{array}\right\} \text{Q es homogénea de grado 3}$$

Luego, la EDO es homogénea.

Hacemos el cambio de variable: $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z x \Leftrightarrow dy = x\,dz + z\,dx$

$$(x^3 + \mathbf{y}^3)\ dx + 3 x \mathbf{y}^2\ d\,y = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$(x^3 + (zx)^3)\,dx + 3x(zx)^2\,(x\,dz + z\,dx) = 0$$

$$x^3 (1+z^3)\,dx + 3z^2 x^3 (x\,dz + z\,dx) = 0$$

Dividiendo por x^3: $(1+z^3)\,dx + 3z^2 x\,dz + 3 z^3\,dx = 0$

$$(1+4z^3)\,dx + 3z^2 x\,dz = 0$$

Separando variables: $\int \frac{3z^2 dz}{1+4z^3} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln(1+4z^3) = -\ln(x) + cte$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln(1+4z^3) + \ln(x) = cte$$

$\Leftrightarrow \ln(1+4z^3)^{\frac{1}{4}} x = cte \Leftrightarrow (1+4z^3)^{1/4} x = cte \Leftrightarrow (1+4z^3)\,x^4 = cte$

Sustituyendo $z = \frac{y}{x}$: $\left(1+4\left(\frac{y}{x}\right)^3\right) x^4 = cte \Leftrightarrow x^4 + 4xy^3 = c$

4 Resolver la ecuación: $(x^3 + 2y)\dfrac{dy}{dx} + 3x(xy - 2) = 0$.

Solución

- Veamos si la Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O) es exacta:

> Recordar: La ecuación diferencial: P dx + Q dy = 0, es exacta si y solo si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$(x^3 + 2y)\frac{dy}{dx} + 3x(xy - 2) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 y - 6x)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0 \qquad (*)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 3x^2 y - 6x \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \\ Q(x,y) = x^3 + 2y \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{array}\right\} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

De esto, la E.D.O es exacta. Por lo tanto, su solución es: F(x,y)=c, de modo que :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2 y - 6x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) = x^3 + 2y \qquad (2)$$

De la ecuación (1) : $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y - 6x \Rightarrow F(x,y) = \displaystyle\int (3x^2 y - 6x)\,dx$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^3 y - 3x^2 + \varphi(y) \qquad (3)$$

Luego, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 y - 3x^2) + \varphi'(y) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y) \qquad (4)$

Reemplazando (2) en (4): $x^3 + 2y = x^3 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 2y$

$$\Rightarrow \int \varphi'(y)\,dy = \int 2y\,dy \Rightarrow \varphi(y) = y^2 \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (3): $F(x,y) = x^3 y - 3x^2 + y^2$.

Finalmente, $x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$, es la solución de la ecuación ordinaria .

5 Resolver la ecuación: $x^2 \dfrac{dy}{dx} + 5xy + 3x^5 = 0$.

Solución

- Veamos si la Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O) es exacta:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 5xy + 3x^5 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(5xy + 3x^5)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x^2}_{Q(x,y)} dy = 0 \qquad (*)$$

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} P(x,y) = 5xy + 3x^5 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 5x \\ Q(x,y) = x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

De esto, la E.D.O no es exacta.

- Determinación de factores integrantes:

> Recordar:
>
> - Si $(P_y - Q_x)/Q$ es una función exclusiva de x, entonces $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$ es el factor integrante.
> - Si $(Q_x - P_y)/P$ es una función exclusiva de y, entonces $\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$ es el factor integrante.

- Si $(P_y - Q_x)/Q = (5x - 2x)/x^2 = 3/x$ es una función exclusiva de x

Luego, $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{3\ln x} \Rightarrow \mu(x) = x^3$

Ahora multiplicamos por el factor integrante $\mu(x) = x^3$, a ambos miembros de la ecuación (*), obtenemos:

$$\mathbf{x^3}(5xy + 3x^5)\, dx + \mathbf{x^3} x^2\, dy = 0 \Rightarrow \underbrace{(5x^4 y + 3x^8)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x^5}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$$

$$P(x,y) = 5x^4 y + 3x^8 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 5x^4$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Q(x,y) = x^5 $\Rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ = $5x^4$

De esto, la E.D.O es exacta. Luego, existe su solución es F(x,y) = c, de modo que :

$\frac{\partial F}{\partial x}$ = P(x,y) = $5x^4y + 3x^8$ (1)

$\frac{\partial F}{\partial y}$ = Q(x,y)= x^5 (2)

De la ecuación (1) : $\frac{\partial F}{\partial x}$ = $5x^4y + 3x^8$ $\Rightarrow$ F(x,y) = $\int(5x^4y + 3x^8)dx$

$\Rightarrow$ F(x,y) = $x^5y + \frac{x^9}{3}$ + φ (y)

Luego, $\frac{\partial F}{\partial y}$ = $\frac{\partial}{\partial y}(x^5y+\frac{x^9}{3})$ + φ ' (y) $\Rightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ = x^5 + φ ' (y) (3)

Reemplazando (2) en (3): $x^5 = x^5 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \int\varphi'(y)dy = \int 0dy$

φ (y) = 0 (4)

Reemplazando (4) en (3): F(x,y) = $x^5y+\frac{x^9}{3}$ + 0.

Finalmente, $x^5y+\frac{x^9}{3}$ = c, es la solución de la ecuación ordinaria .

---

6. Resolver: secx $\frac{dy}{dx}$ + y = senx; y(0)=1

Solución secx $\frac{dy}{dx}$ + y = senx $\Leftrightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ + (cosx)y =cosx senx,

$$\underbrace{\cos x}_{P(x)} \qquad \underbrace{\cos x \operatorname{sen} x}_{Q(x)}$$

esta ecuación diferencial es lineal de primer orden su solución esta dada por:

y $e^{\int P(x)\,dx}$ = $\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)dx + C \Leftrightarrow$ y $e^{\int \cos(x)\,dx}$ = $\int e^{\int \cos(x)\,dx}\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx + C$

Luego: y $e^{\operatorname{sen} x}$ = $\int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx + C \Leftrightarrow$ y $e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}$ (-1+senx) +C (1)

Como: y(0)=1 (x=0; y=1): $1e^{\operatorname{sen} 0} = e^{\operatorname{sen} 0}$ (-1+sen 0) +C $\Leftrightarrow$ C= 2 (2)

Reemplazando (2) en (1), obtenemos la solución: y $e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}$ (-1+senx) +2 .

7. Analizar si: $f'(y)\dfrac{dy}{dx}$ +f(y) P(x) = Q(x) , puede ser transformada a una E.D.O lineal de primer orden.

Solución Sea el cambio: z = f (y)

$$\text{Luego, } \frac{dz}{dx} = \frac{df(y)}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

Ahora de la E.D. original y de la ec.(1), obtenemos: $\dfrac{dz}{dx}$ +P(x) z = Q(x), esta E.D. es lineal.

8. Resolver: $y\,e^{y}\dfrac{dy}{dx} + e^{y^2}x = 3x$

Solución: Haciendo: $z = e^{y^2} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{de^{y^2}}{dx} = 2ye^{y^2}\dfrac{dy}{dx}$

Luego: $\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ + z x = 3x $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dz}{dx}$ + (2x) z = 6x ,esta ecuación diferencial es lineal de primer orden su solución esta dada por:

$$z\,e^{\int 2x dx} = \int e^{\int 2x\,dx} 6x^2 dx + C \Leftrightarrow z\,e^{x^2} = \int e^{x^2}(6x)dx + C \Leftrightarrow z\,e^{x^2} = 3e^{x^2} + C$$

$$\Downarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{y^2}\,e^{x^2} = 3e^{x^2} + C$$

Tomando logaritmos naturales obtenemos: $x^2 + y^2 = \mathrm{Ln}(3e^{x^2} + c)$

9.Determinar un factor integrante de: $2y\,dx - (x+xy^3)dy=0$, si el factor integrante de es de la forma: $u=x^m y^n$.

Solución:

$2y\,dx - (x+xy^3)dy=0 \Leftrightarrow (x^m y^n)(2y\,dx-(x+xy^3)dy) = (x^m y^n)(0)$

$\Leftrightarrow 2x^m y^{n+1}\,dx - (x^{m+1} y^n + x^{m+1} y^{n+3})dy = 0$

Para que sea exacta debe cumplirse: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$P(x,y) = 2x^m y^{n+1}$ $\qquad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(n+1)x^m y^m$

Q(x,y) =- (x^{m+1} y^n + x^{m+1} y^{n+3}) $\Rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ = -(m+1)(x^m y^m+ x^m y^{m+3})

Igualando obtenemos:
2(n+1)x^m y^m =-(m+1)(x^m y^m+ x^m y^{m+3}) $\Rightarrow$2(n+1)$x^m y^m$ =-(m+1)($x^m y^m$)-(m+1) x^m y^{m+3}

De esto, $\left.\begin{array}{r} 2(n+1) = -(m+1) \\ -(m+1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = -1 \\ m = -1 \end{array}$

Por lo tanto, el factor integrante buscado es: u= x^{-1} y^{-1}

---

10. Sea *f*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{y^2+x^4} & si\,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a. Analizar si f tiene derivada direccional en el origen en cualquier dirección
b. Analizar si f es diferenciable en (0,0)

Solución:

a. $D_u f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h\,a, 0+h\,b) - f(0,0)}{h}$, donde u=(a,b), con $a^2 + b^2 = 1$

Caso 1 b≠0:

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3h^2a^2(hb)}{h^2b^2+h^4a^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2a^2(hb)}{h^2h(b^2+h^2a^4)} = \lim_{h\to 0} \frac{3a^2b}{(b^2+h^2a^4)}$$
$$= \frac{3a^2b}{(b^2)} = \frac{3a^2}{b}$$

Caso 2 b=0:

$$D_u f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h\,a, 0+h\,b) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h\,a, 0+h\,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\,a,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3(h^2a^2)(0)}{0^2+h^4a^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

En cualquier caso, $Df_u(0,0) = \begin{cases} \dfrac{3a^2}{b} & si\,b \neq 0 \\ 0 & si\,b = 0 \end{cases}$

Conclusión: En cualquier dirección existe la derivada direccional en (0,0).

b. La función f es no es diferenciable en (0,0), ya que NO es continua en (0,0), puesto que no existe el $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$, dado que:

S1={(x,y)/ y=0}: $\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in S1}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$

S2={(x,y)/ y=x^2}: $\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in S2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2(x^2)}{(x^2)^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

Ejercicios

1 . Un equipo de oceanógrafo está elaborando un mapa del fondo del mar para intentar recuperar un antiguo barco hundido. Por medio de un sonar, desarrollan un modelo:

$D = 250+30x^2+50\ \text{sen}\dfrac{\pi y}{2}$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, donde x,y denotan las distancias en kilométros y D la profundidad en metros.

Hallar la dirección de máximo cambio de profundidad en el punto de posición del barco.

2. Resolver $\dfrac{dy}{dx}=y^2-4$. Además, determine la(s) solucion(es) singulares si existen

Rpta. $y=2\dfrac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$, solucion singular y = -2

3. Resolver $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ Rpta. $(y+3)^5 e^{x}=c(x+4)^5 e^{y}$

4. Determine un solución continua que $\dfrac{dy}{dx}+2xy=f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases} x; & 0\le x<1\\ 0; & x>1\end{cases}$, y(0)=0

Rpta. $\begin{cases}(1+3e^{-x^2})/2, 0\le x<1\\ (e+3)e^{-x^2}/2,\ 1<x\end{cases}$

5. Resolver $6xy\,dx+(4y+9x^2)dy=0$, y(2)=1, Rpta $3x^2y^3+y^4=13$

6. Resolver $(x+y\,e^{y/x})dx-x\,e^{y/x}\,dy=0$, y(1)=0, Rpta ln $\ln|x|=e^{y/x}-1$

7. Resolver $\dfrac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$, y(1)=0, Rpta ln $\ln|x|=e^{y/x}-1$

8. Resolver $\dfrac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$.

9. Resolver a. $y' = e^{3x-2y}$, con y(0)=0

b. $(2x-2y^2)\,dx + (12y^2-4xy)\,dy = 0$

c. $(e^{y} + x)\,dy - dx = 0$, y(2)=0