TEOREMA de Schwarz

Sea f una función de dos variables x e y. Si f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en un conjunto abierto D, entonces, $f_{xy} = f_{yx}$ en D

Observación $f_{xy} = f_{yx}$ puede ser falsa si las derivadas mixtas nos son continuas.

- Las derivadas de orden 3 y de orden superiores se definen de manera semejante de las derivadas de segundo orden. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right] = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}$$

Para funciones de más de dos variables se usan notaciones parecidas y se tienen resultados análogos

PROPIEDAD 4

Sea f: D$\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función definida en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$.

Si f y todos sus derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ son continuas, entonces, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$, i, j = 1,2,...,n

Ejemplo Determinar: i) f_{xxy} , si f(x,y,z) = ln(2 x + y+3 z)

ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z\,\partial y}$, si $u = e^{2x+y-z}$

DERIVADAS DIRECCIONALES Y GRADIENTES

DEFINICIÓN DE DERIVADA DIRECCIONAL

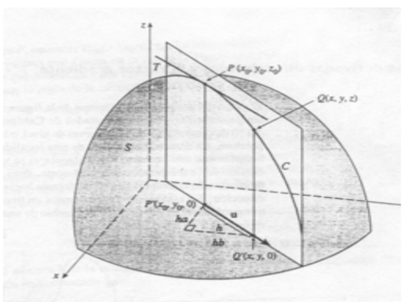
- Sea *f* una función de dos variables, x e y. La **derivada direccional** de *f* en (x_0,y_0) en la dirección del vector unitario **u** = < a, b >, denotado por $D_u f$, se define como:

  $D_u f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$, si este límite existe.

- Sea *f* una función de tres variables, x, y, z. La **derivada direccional** de *f* en (x_0,y_0,z_0) en la dirección del vector unitario **u** = < a, b, c >, denotado por $D_u f$, se define como:

  $D_u f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb, z_0+hc) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$, si este límite existe.

Nota. Se dice que el vector u es unitario, si norma es igual a uno.



PROPIEDAD

Si f es una función diferenciable de x e y, entonces, la derivada direccional en la dirección del vector unitario **u**= < a, b>, es:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b$$

Ejemplo: Si $f(x,y)= x^2 + y^3$, determinar la razón de cambio de f en el punto P(-1,1) en la dirección de P a Q(3,0).

DEFINICIÓN DEL GRADIENTE

- Sea z = f(x,y) una función de dos variables x e y, entonces, el **gradiente** de f, es la función vectorial $\nabla f(x,y)$ definida como:

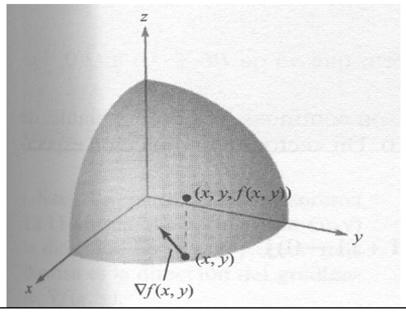
  $$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} \text{ , donde:}$$

  i = < 1, 0 >; j =< 0 , 1 >

- Sea f una función de tres variables x, y, z; entonces, el **gradiente** de f, es la función vectorial $\nabla f(x,y,z)$ definida como:

  $$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

  donde: i = < 1, 0, 0 >; j =< 0 , 1, 0 >; k=< 0 , 0, 1 >



El gradiente de f(x,y) es un vector en el plano xy

PROPIEDAD

Si f es una función (de dos o tres variables) diferenciable, su derivada direccional en la dirección del vector unitario **u** , es:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE

Sea f una función diferenciable de dos o tres variables .

1. Si $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, entonces, $D_u f(\mathbf{x}) = 0$, para todo **u**
2. La dirección de *máximo* crecimiento de f viene dado por $\nabla f(\mathbf{x})$. El valor máximo de $D_u f(\mathbf{x})$ es $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.
3. La dirección de *mínimo* crecimiento de f viene dado por $-\nabla f(\mathbf{x})$. El valor mínimo de $D_u f(\mathbf{x})$ es $-\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.