Capítulo 9

Estimación por intervalos

9.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla la estimación por intervalos donde el proceso de inferencia se realiza de la forma $\theta \in C$, donde $C = C(\mathbf{x})$ es un conjunto que se determina usando la información contenida en la muestra.

9.2. Estimación por intervalos

Definición 9.2.1 Una *estimación por intervalo* de un parámetro θ es algún par de funciones de la muestra que satisfacen $L(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. El intervalo aleatorio $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ es llamado un *estimador por intervalo.*

Ejemplo 9.2.1 Para una muestra $X_1, \cdots, X_4$ de la distribución $\mathcal{N}(\mu, 1)$ un estimador por intervalo de μ es $[\overline{X} - 1, \overline{X} + 1]$.

Definición 9.2.2 Sea $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ un estimador por intervalo de θ, la *probabilidad de cobertura* es la probabilidad que el intervalo aleatorio cubra al parámetro θ.

Ejemplo 9.2.2 En el ejemplo anterior la probabilidad que μ sea cubierto por $[\overline{X} - 1, \overline{X} + 1]$ es 0,9544.

Definición 9.2.3 Sea $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ un estimador por intervalo para θ, el *coeficiente de confianza* es el ínfimo de las probabilidades de cobertura.

Los estimadores de intervalo junto con una medida de confianza, usualmente un coeficiente de confianza, son conocidos como *intervalos de confianza.*

Ejemplo 9.2.3 Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una población unifome en el intervalo $(0, \theta)$ y sea $X_{(n)}$ el máximo. Se está interesado en un estimador por intervalo de θ. Si consideramos los siguientes candidatos:

$$\underset{1\leq a<b}{[aX_{(n)}, bX_{(n)}]} \quad \text{y} \quad \underset{0\leq c<d}{[X_{(n)}+c, X_{(n)}+d]}$$

donde a, b, c y d son constantes. Para el primer intervalo la probabilidad de cobertura es:

$$\begin{aligned}
\Pr_{\theta}\left(\theta \in [aX_{(n)}, bX_{(n)}]\right) &= \Pr_{\theta}\left(aX_{(n)} \leq \theta \leq bX_{(n)}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{1}{b} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq \frac{1}{a}\right) \\
&= \Pr\left(\frac{1}{b} \leq T \leq \frac{1}{a}\right) \\
&= \left(\frac{1}{a}\right)^n - \left(\frac{1}{b}\right)^n
\end{aligned}$$

y no depende del parámetro θ, entonces $\left(\frac{1}{a}\right)^n - \left(\frac{1}{b}\right)^n$ es el coeficiente de confianza del parámetro. Para el segundo intervalo:

$$\begin{aligned}
\Pr_{\theta}\left(\theta \in [X_{(n)}+c, X_{(n)}+d]\right) &= \Pr_{\theta}\left(X_{(n)}+c \leq \theta \leq X_{(n)}+d\right) \\
&= \Pr\left(1-\frac{d}{\theta} \leq T \leq 1-\frac{c}{\theta}\right) \\
&= \left(1-\frac{c}{\theta}\right)^n - \left(1-\frac{d}{\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

y depende del parámetro θ. Además:

$$\lim_{\theta\to\infty}\left(1-\frac{c}{\theta}\right)^n - \left(1-\frac{d}{\theta}\right)^n = 0$$

es decir que el coeficiente de confianza del intervalo es cero.

9.3. Métodos para encontrar estimadores de intervalos

Se presentan tres métodos para hallar estimadores por intervalo basados en la estrategia de invertir una prueba estadística.

9.3.1. Invirtiendo una prueba estadística

Existe una fuerte correspondencia entre las pruebas de hipótesis y la estimación por intervalos. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.3.1 Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria obtenida de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Considere las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Para un nivel α, se tiene la región de rechazo $\{\mathbf{x} :\mid \bar{x} - \mu_0 \mid > z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}$. Notar que H_0 no se rechaza si $\mid \bar{x} - \mu_0 \mid \leq z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$, o equivalentemente:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como la prueba tiene tamaño α, esto significa que $\Pr(H_0 \,\text{se rechaza}\, | \mu = \mu_0) = \alpha$, o visto de otra forma $\Pr(\text{No rechazar}\, H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$. Luego:

$$\Pr\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha$$

Pero lo anterior es verdadero para todo μ_0, entonces:

$$\Pr\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

El siguiente teorema presenta una versión formal de la correspondencia entre las pruebas de hipótesis y la estimación por intervalos.

Teorema 9.3.1 Para todo $\theta_0 \in \Theta$, sea $A(\theta_0)$ la región de no rechazo para una prueba con nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$. Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ se define el conjunto $C(\mathbf{x})$ en el espacio paramétrico por:

$$C(\mathbf{x}) = \{\theta_0 : \mathbf{x} \in A(\theta_0)\} \tag{9.3.1}$$

entonces el conjunto aleatorio $C(\mathbf{X})$ es un conjunto de confianza $1 - \alpha$. Inversamente, sea $C(\mathbf{X})$ un conjunto de confianza $1 - \alpha$. Para todo $\theta_0 \in \Theta$, se define:

$$A(\theta_0) = \{\mathbf{x} : \theta_0 \in C(\mathbf{x})\}$$

entonces $A(\theta_0)$ es la región de no rechazo de una prueba a un nivel α de $H_0 : \theta = \theta_0$.

Ejemplo 9.3.2 Suponga que se desea obtener un intervalo de confianza para la media de la distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. La prueba de razón de verosimilitud para $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ es:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{\overline{x}}{\lambda_0}\right)^n e^n e^{-n\overline{x}/\lambda_0}$$

Para λ_0 fijo la región de no rechazo es:

$$A(\lambda_0) = \left\{\mathbf{x} : \left(\frac{\overline{x}}{\lambda_0}\right)^n e^{-n\overline{x}/\lambda_0} \geq c\right\}$$

donde c es la constante que satisface $\Pr_{\lambda_0}(\mathbf{x} \in A(\lambda_0)) = 1 - \alpha$. Invirtiendo la región de no rechazo se obtiene el conjunto de confianza $1 - \alpha$:

$$C(\mathbf{x}) = \left\{\lambda : \left(\frac{\overline{x}}{\lambda}\right)^n e^{-n\overline{x}/\lambda} \geq c\right\}$$

que debe ser resuelta usando métodos numéricos.

Ejemplo 9.3.3 Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria obtenida de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Suponga que se desea obtener un intervalo de confianza acotado superiormente para μ, es decir de la forma $C(\mathbf{x}) = (-\infty, U(\mathbf{x})]$, invirtiendo la prueba de una cola $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu < \mu_0$.

9.3.2. Cantidades pivotales

El intervalo $[X_{(n)} + c, X_{(n)} + d]$ del ejemplo 9.2.3 tiene una probabilidad de cobertura que no depende del parámetro ya que puede ser expresada en términos de $X_{(n)}/\theta$, una variable aleatoria cuya distribución no depende del parámetro, llamada *cantidad pivotal* o *pivote*.

Definición 9.3.1 Una variable aleatoria $Q(\mathbf{X}, \theta) = Q(X_1, \cdots, X_n, \theta)$ es una *cantidad pivotal*, o *pivote*, si la distribución de $Q(\mathbf{X}, \theta)$ es independiente de todo parámetro.

Ejemplo 9.3.4 En los casos de las familias de locación y escala existen muchas cantidades pivotales:

Forma	Tipo	Cantidad pivotal
$f(x-\mu)$	Locación	$\overline{X}-\mu$
$\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	Escala	$\frac{\overline{X}}{\sigma}$
$\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	Locación-escala	$\frac{\overline{X}-\mu}{S}$

Ejemplo 9.3.5 Suponga que $X_1, \cdots, X_n$ son independientes e identicamente distribuidos según $\mathcal{E}(\lambda)$. Entonces $T = \sum X_i$ es una estadística suficiente para λ y $T \sim \mathcal{G}(n, \lambda)$, luego $Q(T, \lambda) = 2T/\lambda \sim X^2_{2n}$ es un pivote. Recordar además que la distribución gamma es una familia de escala.

Ejemplo 9.3.6 En el ejemplo 9.3.2 se obtuvo un intervalo de confianza para la media invirtiendo la prueba de nivel α, $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Si se tiene una muestra aleatoria $X_1, \cdots, X_n$ y se define $T = \Sigma X_i$ y $Q(T, \lambda) = 2T/\lambda \sim \chi^2_{2n}$, pueden escogerse las constantes a y b que satisfacen $\Pr(a \leq \chi^2_{2n} \leq b) = 1 - \alpha$, entonces:

$$\begin{aligned}\Pr(a \leq Q(T,\lambda) \leq b) &= \Pr\left(a \leq \frac{2t}{\lambda} \leq b\right) \\ &= \Pr\left(\frac{2t}{b} \leq \lambda \leq \frac{2t}{a}\right) \\ &= 1-\alpha\end{aligned}$$

Ejemplo 9.3.7 Si $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria obtenida desde la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es un pivote cuando σ^2 es conocido y puede utilizarse para calcular un intervalo de confianza para μ:

$$\Pr\left(a \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) = \Pr(a \leq Z \leq b)$$

entonces:

$$\left\{\overline{x} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

Si σ^2 es desconocido se puede usar el pivote $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$:

$$\Pr\left(a \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq b\right) = \Pr(a \leq T_{n-1} \leq b)$$

entonces:

$$\left\{\overline{x} - b\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} - a\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$$

Si se desea un intervalo para σ se usa el pivote $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$. Se eligen a y b tal que:

$$\Pr\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = \Pr(a \leq \chi^2_{n-1} \leq b)$$

entonces:

$$\left\{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{b}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{a}}\right\}$$

9.3.3. Pivote a través de la función de distribución acumulada

Suponga que T es una variable aleatoria continua. Se sabe que $F_T(T|\theta)$ tiene distribución uniforme en el intervalo (0,1) y puede ser usada como pivote. Si $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ entonces la región de no rechazo de la hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ es:

$$\{t : \alpha_1 \leq F_T(T|\theta_0) \leq 1 - \alpha_2\}$$

cuyo intervalo asociado es:

$$\{\theta : \alpha_1 \leq F_T(T|\theta) \leq 1 - \alpha_2\}$$

En la práctica se suele elegir T como una estadística suficiente sin embargo no se trata de un requisito necesario para la construcción del intervalo.

Teorema 9.3.2 Sea T una estadística con función de distribución acumulada continua $F_T(t|\theta)$ y suponga que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, donde $0 < \alpha < 1$.

a. Si $F_T(t|\theta)$ es una función decreciente de θ para cada t, se definen $\theta_L(t)$ y $\theta_U(t)$ por:

$$F_T(t|\theta_U(t)) = \alpha_1 \qquad F_T(t|\theta_L(t)) = 1 - \alpha_2$$

b. Si $F_T(t|\theta)$ es una función creciente de θ para cada t, se definen $\theta_L(t)$ y $\theta_U(t)$ por:

$$F_T(t|\theta_U(t)) = 1 - \alpha_2 \qquad F_T(t|\theta_L(t)) = \alpha_1$$

entonces el intervalo aleatorio $[\theta_L(T), \theta_U(T)]$ es un intervalo de confianza $1-\alpha$ para θ.

Ejemplo 9.3.8 Si $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria extraída de la población con función de densidad $f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)}$, $x \geq \mu$. Hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$ para μ usando la estadística suficiente $Y = X_{(1)}$ y considerando que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

9.4. Métodos de evaluación de estimadores por intervalos

Se han estudiado diferentes métodos para encontrar intervalos de confianza y es posible contar con más de una alternativa para un mismo problema. Como es necesario elegir la mejor propuesta se examinan a continuación algunos métodos y criterios para su evaluación.

9.4.1. Tamaño y probabilidad de cobertura

Si se considera fija la probabilidad de cobertura se debe buscar el intervalo que tenga la menor longitud.

Ejemplo 9.4.1 Sean $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria extraída desde la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ donde σ^2 es conocida. Se sabe que:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es un pivote con distribución normal estándar. Considerando a y b que satisfacen:

$$\Pr(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha$$

se obtiene el intervalo de confianza $1-\alpha$:

$$\left\{\overline{x} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

¿qué elección de a y b es la mejor? ¿qué elección de a y b minimiza la longitud del intervalo de confianza manteniendo la cobertura $1-\alpha$?

Teorema 9.4.1 Sea $f(x)$ una función de densidad unimodal. Si el intervalo $[a, b]$ satisface:

a. $\int_a^b f(x)dx = 1 - \alpha$.

b. $f(a) = f(b)$, y

c. $a \leq x^* \leq b$, donde x^* es una moda de $f(x)$.

entonces $[a, b]$ es el más pequeño entre todos los intervalos con cobertura $1-\alpha$.

Ejemplo 9.4.2 Para intervalos de la distribución normal basados en la cantidad pivotal $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ se sabe que el intervalo de confianza $1-\alpha$ de longitud más pequeña es de la forma:

$$\bar{x} - b\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - a\frac{s}{\sqrt{n}}$$

La longitud del intervalo es una función de s:

$$\text{Longitud}(s) = (b-a)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Aplicando el teorema 9.4.1 se llega a que $a = -t_{n-1;1-\alpha/2}$ y $b = t_{n-1;1-\alpha/2}$ permiten obtener el intervalo óptimo.

9.5. Otras consideraciones

9.5.1. Intervalos aproximados por máxima verosimilitud

Si $X_1, \cdots, X_n$ son independientes distribuidas según $f(x|\theta)$ y $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud para θ, entonces de 7.4.1 la varianza de una función $h(\hat{\theta})$ puede ser aproximada por:

$$\widehat{\mathrm{Var}}(h(\hat{\theta})|\theta) \approx \frac{[h'(\theta)]^2 \mid_{\theta=\hat{\theta}}}{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log L(\theta|\mathbf{x}) \mid_{\theta=\hat{\theta}}}$$

Luego, para un valor de θ arbitrario pero fijo y bajo condiciones generales de regularidad se tiene:

$$\frac{h(\hat{\theta}) - h(\theta)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(h(\hat{\theta})|\theta)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

lo cual permite obtener el intervalo aproximado de confianza:

$$h(\hat{\theta}) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(h(\hat{\theta})|\theta)} \leq h(\theta) < h(\hat{\theta}) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(h(\hat{\theta})|\theta)}$$

Ejemplo 9.5.1 Se tiene un muestra aleatoria $X_1, \cdots X_n$ de una población $\mathcal{B}(p)$. Si se desea estimar la razón de odds $\frac{p}{1-p}$ puede utilizarse $\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}$ donde $\hat{p} = \overline{x}$ es el estimador de máxima verosimilitud. Luego:

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right) \approx \frac{[h'(p)]^2 \mid_{p=\hat{p}}}{-\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log L(p|\mathbf{x}) \mid_{p=\hat{p}}} = \frac{\left[\frac{1}{(1-\hat{p})^2}\right]^2}{\frac{n}{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\hat{p}}{n(1-\hat{p})^3}$$

Se puede construir el intervalo de confianza aproximado:

$$\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right)} \leq \frac{p}{1-p} \leq \frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right)}$$

obteniendose:

$$\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}}{n(1-\overline{x})^3}} \leq \frac{p}{1-p} \leq \frac{\overline{x}}{1-\overline{x}} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}}{n(1-\overline{x})^3}}$$

9.5.2. Otros intervalos aproximados

Si se tienen las estadísticas W ,V y un parámetro θ tal que cuando $n \to \infty$,

$$\frac{W-\theta}{V} \to \mathcal{N}(0,1)$$

entonces se puede construir un intervalo de confianza aproximado para θ por:

$$W - z_{1-\alpha/2}V \leq \theta \leq W + z_{1-\alpha/2}V$$