Estadística Bayesiana

Procesos Estocásticos

Ms Carlos López de Castilla Vásquez

Universidad Nacional Agraria La Molina

2016-1

Proceso Estocástico

- Un *proceso estocástico* $\{X(t), t \in T\}$ es una colección de variables aleatorias. Es decir que para cada $t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria.
- El indice t es interpretado generalmente como el *tiempo*, y como resultado $X(t)$ es el *estado* del proceso en el tiempo t.
- Por ejemplo, $X(t)$ podría ser: el número total de clientes que ingresaron a un supermercado en el tiempo t; el número de clientes en el supermercado en el tiempo t; el total de las ventas registradas en el supermercado en el tiempo t, etc.
- El conjunto T es llamado el *conjunto índice* del proceso.

Proceso Estocástico

- Cuando T es un conjunto contable el proceso estocástico es llamado de *tiempo discreto*.
- Por ejemplo, $\{X(n), n = 0, 1, \cdots\}$ es un proceso estocástico de tiempo discreto indexado por los enteros no negativos.
- Por otro lado $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico de *tiempo continuo* indexado por los números reales no negativos.
- El *espacio de estados* de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que las variables aleatorias $X(t)$ pueden tomar.
- Luego, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias que describe la evolución de cierto proceso a través del tiempo.

Cadenas de Markov

- Considere un proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ que toma un número finito o infinito numerable de posibles valores.
- Si $X_n = i$, entonces se dice que el proceso se encuentra en el estado i en el tiempo n.
- Se supone que si el proceso se encuentra en el estado i, existe una probabilidad fija p_{ij} que el proceso se moverá al estado j, es decir:

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = p_{ij}$$

- El proceso anterior es llamado una *Cadena de Markov*.
- En una Cadena de Markov la distribución condicional de un estado futuro X_{n+1} solo depende de su estado actual X_n.

Cadenas de Markov

- La probabilidad que el proceso realice una transición hacia el estado j dado que se encuentra en el estado i se denota por p_{ij}.
- Se cumple que $p_{ij} \geq 0$ para $i, j \geq 0$ y $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$ para $i = 0,1,\cdots$.
- Sea $\mathbf{P}$ que denota la matriz de probabilidades de transición de un paso p_{ij} tal que:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Ejemplos

Pronóstico del clima

- Suponga que la probabilidad de que mañana llueva depende de las condiciones del clima el día de hoy.
- Si hoy llueve entonces mañana lloverá con una probabilidad 0.70.
- Si hoy no llueve entonces mañana lloverá con una probabilidad 0.40.
- Definir los estados y hallar la matriz de transición.

Ejemplos

Sistema de comunicaciones

- Considere un sistema de comunicaciones que transmite los dígitos 0 y 1.
- Cada dígito transmitido debe pasar a través de varios niveles en los que existe una probabilidad p de que el dígito no cambie cuando abandona el nivel.
- Sea X_n que denota el dígito que ingresa en el n-ésimo nivel.
- Definir los estados y hallar la matriz de transición.

Ejemplos

Día a día de Jaime

- Cada día Jaime puede sentirse alegre, regular o malhumorado.
- Si hoy día se siente alegre, entonces mañana podría sentirse alegre, regular o malhumorado con probabilidades 0.5, 0.4 y 0.1 respectivamente.
- Si hoy día se siente regular, entonces mañana podría sentirse alegre, regular o malhumorado con probabilidades 0.3, 0.4 y 0.3 respectivamente.
- Finalmente, si hoy día se siente malhumorado, entonces mañana podría sentirse alegre, regular o malhumorado con probabilidades 0.2, 0.3 y 0.5 respectivamente.
- Definir los estados y hallar la matriz de transición.

Probabilidades de transición en n pasos

- Se definen las probabilidades de transición en n pasos por:

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{n+k} = j | X_k = i)$$

para $n \geq 0$, $i, j \geq 0$ y donde $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

- Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular estas probabilidades.
- Si $\mathbf{P}^{(n)}$ denota la matriz de transición en n pasos entonces:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

- La matriz $\mathbf{P}^{(n)}$ se obtiene multiplicando la matriz $\mathbf{P}$ por sí misma n veces.

Ejemplos

Pronóstico del clima

- Calcular la probabilidad que llueva dentro de cuatro días sabiendo que hoy día llovió.

Día a día de Jaime

- Calcular la probabilidad que Jaime se encuentre alegre el domingo sabiendo que hoy se encuentra malhumorado.

Probabilidades límites

- En el ejemplo del pronóstico del clima se tiene:

$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4251 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(8)} = \begin{bmatrix} 0{,}572 & 0{,}428 \\ 0{,}570 & 0{,}430 \end{bmatrix}$$

- La matriz $\mathbf{P}^{(4)}$ es casi idéntica a la matriz $\mathbf{P}^{(8)}$ y además cada fila de esta última tiene aproximadamente los mismos valores.
- Se observa que $p_{ij}^{(n)}$ converge hacia cierto valor que es el mismo para todo i.

Probabilidades límites

Teorema

Si la cadena de Markov es irreductible y ergódica entonces $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i. Además, sea:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \qquad j \geq 0$$

entonces π_j es la única solución no negativa de:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

Probabilidades límites

Probabilidades límites

- Considere una cadena de Markov cuya matriz de transición es :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

- A la larga, ¿que proporción del tiempo el proceso se encuentra en cada uno de los tres estados?

Probabilidades límites

Movilidad de clase

- Un problema de interés para sociólogos es determinar la proporción de la sociedad que tiene una ocupación de clase baja, media o alta.
- Un modelo matemático posible asume que la transición entre ocupaciones para generaciones sucesivas en una familia puede ser considerada como una cadena de Markov.
- Se asume que la ocupación de un hijo solo depende de la ocupación de sus padres.

Probabilidades límites

Movilidad de clase

- Suponga que la matriz de transición esta dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}48 & 0{,}07 \\ 0{,}05 & 0{,}70 & 0{,}25 \\ 0{,}01 & 0{,}50 & 0{,}49 \end{bmatrix}$$

- A la larga, ¿que proporción de las personas se encontraran en ocupaciones de clase baja, media o alta?