PRINCIPALES DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

A.- DISTRIBUCIONES DE VARIABLES DISCRETAS

1 DISTRIBUCION BINOMIAL

Analiza y describe a los experimentos aleatorios secuenciales cuyas características son:

- En cada ensayo hay sólo 2 resultados posibles "**mutuamente excluyentes**". Por conveniencia se denominará "éxito=1" o resultado favorable y "fracaso=0" o resultado desfavorable.
- La probabilidad de obtener un éxito en cada uno de los ensayos es **P** y se "mantiene constante" de un ensayo a otro ensayo.
- Se realizan "**n ensayos repetidos en forma independiente**".

La probabilidad de lograr "**x éxitos**" en los "**n ensayos**" se encuentra por:

$$P(x) = C_x^n P^x (1-P)^{n-x}$$

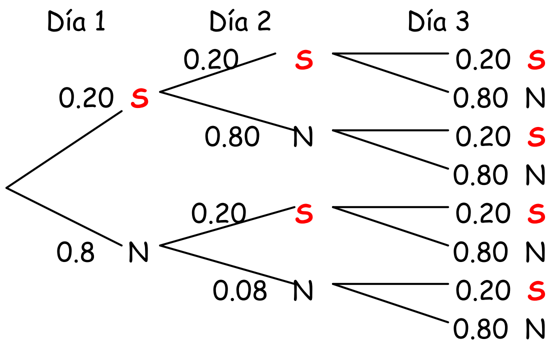
$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} P^x (1-P)^{n-x}$$

$$Esperanza\ Matemática: \quad E(x) = nP$$

$$Variancia: \quad V(x) = nP(1-P)$$

Ejemplo: La probabilidad que un día cualquiera la agencia de viajes TURSA "**venda pasajes a Italia**" es P=0.20 y la agencia trabaja 3 días. Si la atención de cada día es independiente a la atención de los días siguientes:

Esquema del experimento: S = Si vende; N = No vende pasajes a Italia



Evento	xi	P(xi)
SSS	3	0.008
SSN	2	0.032
SNS	2	0.032
SNN	1	0.128
NSS	2	0.032
NSN	1	0.128
NNS	1	0.128
NNN	0	0.512

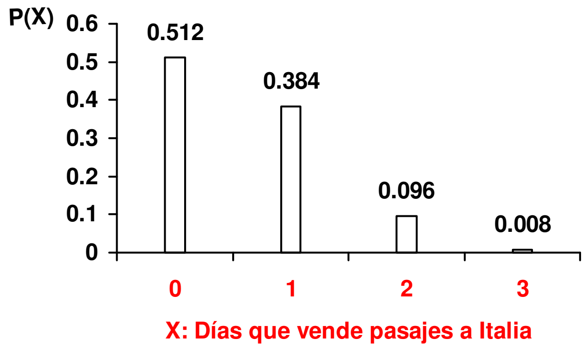
Se define la variable aleatoria:

x_i: Número de días que la agencia vende pasajes a Italia:

En este experimento aleatorio:
n=3 Días de atención independientes (ensayos)
P=0.20 Probabilidad de vender pasajes a Italia en un día cualquiera
X=0,1,2,3 Días que vende pasajes a Italia en los 3 días de atención

La distribución de probabilidades de la variable aleatoria X es:

X	$P(x)=C_x^3(0.2)^x(1-0.2)^{3-x}$
0	$P(x=0)=C_0^3(0.2)^0(0.8)^3=0.512$
1	$P(x=1)=C_1^3(0.2)^1(0.8)^2=0.384$
2	$P(x=2)=C_2^3(0.2)^2(0.8)^1=0.096$
3	$P(x=3)=C_3^3(0.2)^3(0.8)^0=0.008$
Total	1



Para la distribución de probabilidades resultante se verifica que:

- Esperanza matemática: $\boxed{E(X)=\sum xP(x)=nP}=3(0.2)=0.6$ pasajes en promedio.
- Variancia: $\boxed{V(X)=\sum x^2-[E(x)]^2=nP(1-P)}=3(0.2)(0.8)=0.48$
- ¿Cuál es la probabilidad que durante los próximos 3 días de trabajo, la agencia "venda pasajes a Italia" en exactamente 3 días?

$$P(x=3)=C_3^3(0.20)^3(0.80)^0=\frac{4!}{(4-3)!3!}(0.20)^3(0.80)^0=0.008$$

- ¿Cuál es la probabilidad que en los próximos 3 días de trabajo, la agencia "venda pasajes a Italia" en 2 ó más días?.

$$P(x\geq 2)=\sum_{x=2}^{n}C_x^nP^x(1-P)^{n-x}=\Pr(x=2)+\Pr(x=3)=0.096+0.008=0.104$$

2 DISTRIBUCION POISSON

Analiza experimentos aleatorios relacionados con una variable aleatoria de las características siguientes:

- Está asociada con el número de ocurrencias de un evento en un período de tiempo; (de área o de volumen).
- La variable aleatoria asume los valores: **0, 1, 2, 3, 4,…**
- La probabilidad de ocurrencia de un evento en un subintervalo de tiempo es proporcional a su amplitud y es la misma para todos los subintervalos.
- Para todo intervalo de tiempo (área o volumen) es posible identificar una tasa de ocurrencia "**o**" a partir de la cual determinar el parámetro de la distribución "**λ**".
- La variable aleatoria "x" es el "número de éxitos que se obtienen cuando los eventos ocurren en un espectro continuo de tiempo o del espacio.

La probabilidad de encontrar "x" éxitos es:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad Donde \;\; e = 2.71828$$

$$Esperanza \;\; Matemática: \; E(x) = \lambda = nP$$
$$Variancia: \qquad V(x) = \lambda = nP$$

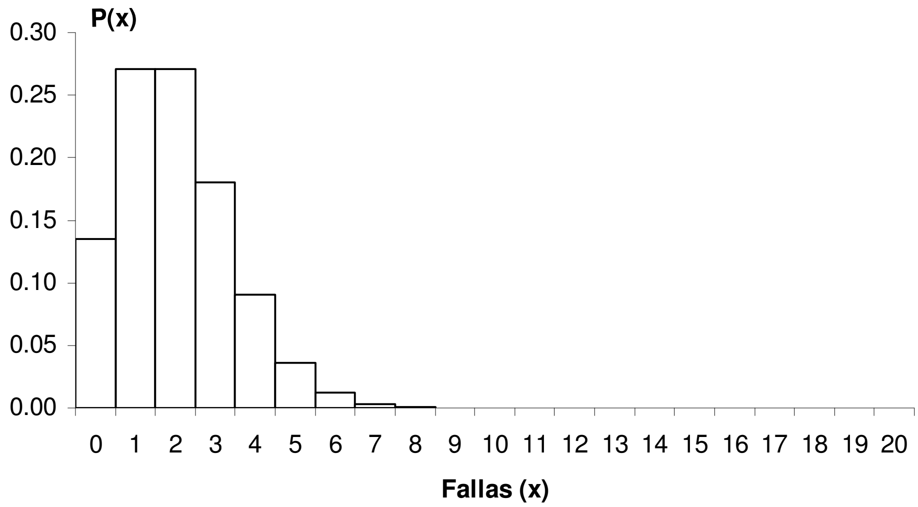
Ejemplo: Para el caso de un experimento relacionado con la atención de clientes a través de un cajero automático que falla en 2 clientes por día.

Para el caso de este experimento aleatorio:
X=0,1,2,3,4…. Número de clientes en los que falla el cajero durante el día

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^x e^{-2}}{x!} \; ; \qquad Lamda \;\; \lambda = 2$$ fallas al día

x	$P(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$
0	$P(x=0)=2^0e^{-2}/0!=0.13534$
1	$P(x=1)=2^1e^{-2}/1!=0.27067$
2	$P(x=2)=2^2e^{-2}/2!=0.27067$
3	$P(x=3)=2^3e^{-2}/3!=0.18045$
4	$P(x=4)=2^4e^{-2}/4!=0.09022$
…	………………
Total	1

Histograma



Para la distribución de probabilidades resultante se verifica que:

- Esperanza matemática $\boxed{E(X)=\lambda}= 2$ promedio de atenciones fallidas al día
- Variancia $\boxed{V(X)=\sum x^2-[E(x)]^2=\lambda}=2$

- ¿Cuál es la probabilidad que durante el día falle exactamente 3 veces?.

$$P(x=3)=\frac{2^3 e^{-2}}{3!}=0.18044$$

- ¿Cuál es la probabilidad que durante el día no falle ninguna vez?.

$$P(x=0)=\frac{2^0 e^{-2}}{0!}=0.13534$$

- ¿Cuál es la probabilidad que durante el día falle en más de un cliente?.

Considerando que $\sum P(x)= P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+....= 1$

$$P(x>1)=1-[P(x=0)+P(x=1)]=1-\left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!}+\frac{2^1 e^{-2}}{1!}\right]=1-[0.13534+0.27067]=0.59399$$

- ¿Cuál es la probabilidad que en medio día falle 3 veces?.

En este caso $P(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{1^x e^{-1}}{x!}$; Lamda $\lambda=2/2=1$ falla en medio día

$$P(x=3)=\frac{1^3 e^{-1}}{3!}=0.06138$$

3 DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Describe a los experimentos aleatorios cuyas características son:

- En cada ensayo hay sólo 2 resultados posibles "**mutuamente excluyentes**". Por conveniencia se denomina "éxito=1" o resultado favorable y "fracaso=0" al resultado desfavorable.
- Estudia una población finita de tamaño **N** elementos, donde **A** elementos tienen un atributo y los (**N-A**) elementos restantes no lo tienen
- Se eligen al azar y "**sin reposición**" **n** elementos de la población.

Se define la variable aleatoria "x" como el "número de elementos de la muestra que tiene el atributo investigado, La probabilidad de encontrar "x=k" éxitos en la muestra de "n" observaciones es:

$$P(x=k)=\frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{C_k^A C_{n-k}^{N-A}}{C_n^N}$$

$$Esperanza\ \ Matemática:\ E(x)=\frac{nA}{N}$$

$$Variancia:\qquad V(x)=\frac{nA}{N}\left(1-\frac{A}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Ejemplo: En la recepción del hotel Astor hay 20 clientes de los cuales 15 están insatisfechos por la atención recibida. Se elige una muestra sin reposición de 4 clientes y se le pregunta su opinión sobre el servicio.

Para el experimento:

N=20 total de clientes ;

A=15 total de clientes insatisfechos de la atención;

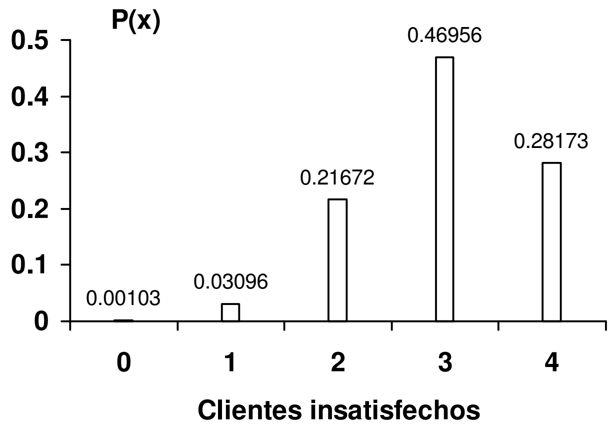
N-A=5 total de clientes satisfechos de la atención;

n=4 número de clientes elegidos al azar y sin reemplazo;

x: 0,1,2,3,4 clientes insatisfechos resultante en la muestra.

X	$P(x)=\frac{C_x^{15}C_{4-x}^{5}}{C_4^{20}}$
0	P(x=0)=$C_0^{15}C_4^{5}/C_4^{20}$=0.00103
1	P(x=1)= $C_1^{15}C_3^{5}/C_4^{20}$=0.03096
2	P(x=2)= $C_2^{15}C_2^{5}/C_4^{20}$=0.21672
3	P(x=3)= $C_3^{15}C_1^{5}/C_4^{20}$=0.46956
4	P(x=4)= $C_4^{15}C_0^{5}/C_4^{20}$=0.28173
Total	1

HISTOGRAMA



$$Esperanza\ \ Matemática:\ E(x)=\frac{nA}{N}=\frac{4(15)}{20}=3\quad Clientes\quad insatisfechos$$

$$La\ \ Variancia:\ V(x)=\frac{nA}{N}\left(1-\frac{A}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=\frac{4(15)}{20}\left(1-\frac{15}{20}\right)\left(\frac{20-4}{20-1}\right)=0.63158$$

Determine las probabilidades siguientes:

- Que 3 clientes de la muestra manifiesten estar insatisfechos.

$$\Pr(x=3)=\frac{C_3^{15}C_1^5}{C_4^{20}}=\frac{\left(\frac{15!}{3!12!}\right)\left(\frac{5!}{1!4!}\right)}{\frac{20!}{4!16!}}=0.46956$$

- Por lo menos 3 clientes de la muestra manifiesten estar insatisfechos.

$$\Pr(x\geq 3)=\Pr(x=3)+\Pr(x=4)=\frac{C_3^{15}C_1^5}{C_4^{20}}+\frac{C_4^{15}C_0^5}{C_4^{20}}=0.46956+0.28173=0.75129$$

- Por lo menos 1 cliente de la muestra manifieste estar insatisfecho.

Considerando que ∑P(x)= P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=1
Luego: P(x≥1)=1-P(x=0)

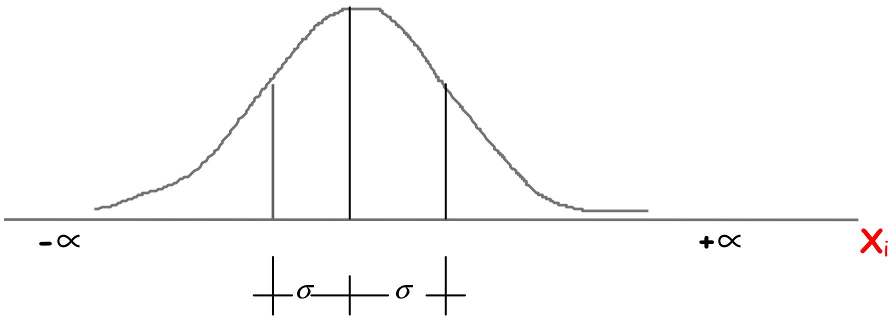
$$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-\frac{C_0^{15}C_4^5}{C_4^{20}}=1-0.00103=0.0.99897$$

B.- DISTRIBUCIONES DE VARIABLES CONTINUAS

1 DISTRIBUCION NORMAL

Si Xi es una variable aleatoria continua que describe valores de "ocurrencia normal", entonces su función de probabilidad es:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2} \qquad Cuando \quad -\infty \leq x_i \leq \infty$$



$$Donde: \quad e = 2.7183 \quad \text{y} \quad \pi = 3.1416$$

$$Esperanza \quad Matemática \quad E(x) = \mu$$

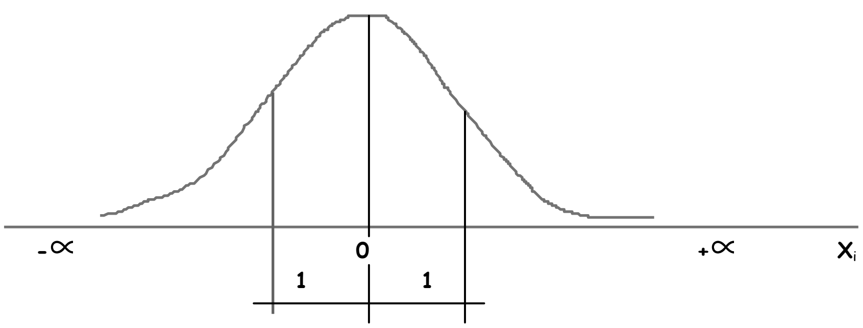
$$Variancia \quad V(x) = \sigma^2$$

Para establecer las probabilidades asociadas a cualquier evento se deberá determinar las correspondientes áreas comprendidas bajo esta función, para lo cual será necesario trabajar con cálculo integral o utilizar la distribución normal estándar (Estandarizar variables).

Distribución Normal Estandarizada

Para una variable X_i que tiene una distribución normal se define la transformación: $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ cuya distribución será:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} e^{-\frac{1}{2}Z_i^2} \qquad Cuando \quad -\infty \leq Z_i \leq \infty$$



$$Donde: \quad e = 2.7183 \quad \text{y} \quad \pi = 3.1416$$

$$Esperanza \quad Matemática \quad E(Z) = 0$$

$$Variancia \quad V(Z) = 1$$

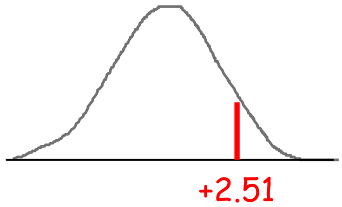
Determinación de Areas bajo la Curva Normal

Estandarización de variables normales:

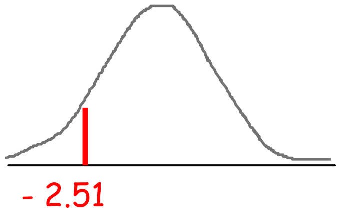
$$\boxed{Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}}$$

Las áreas bajo la curva normal estandarizada se determinan con la tabla Z

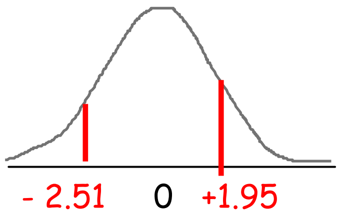
1. $\Pr[Z \leq 2.51] = 0.99396$



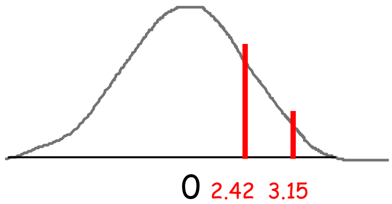
2. $\Pr[Z \leq -2.51] = 0.00604$



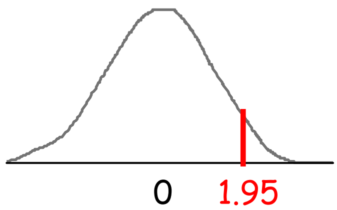
3. $\Pr[-2.51 \leq Z \leq 1.95] = 0.97441 - 0.00604 = 0.96837$



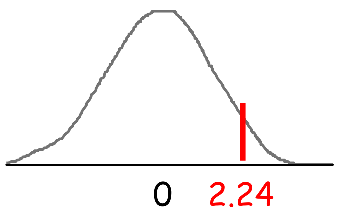
4. $\Pr[2.42 \leq Z \leq 3.15] = 0.99918 - 0.99224 = 0.00694$



5. $\Pr[Z \geq 1.95] = 1 - 0.97441 = 0.02559$



6. $\Pr[Z \leq 2.24] = 0.98745$



Ejemplo: Las remuneraciones de 10000 empleados de una cadena de hoteles tiene distribución normal con promedio S/ 500 mensual y desviación estándar S/ 100.

- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar empleados con sueldo menor a S/ 600?

$$P[X_i \leq 600] = \Pr\left[\frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{600-500}{100}\right] = \Pr[Z_i \leq 1.00] = 0.84134$$

- ¿Cuántos empleados con sueldo menor a S/ 600 esperaría encontrar?

$N * P[X_i \leq 600] = 10000 * P[X_i \leq 600] = 10000(0.84134) = 8413$ empleados

- ¿Cuántos empleados con sueldos entre 400 y 600 esperaría encontrar?

$$P[400 \leq X_i \leq 600] = P\left[\frac{400-500}{100} \leq \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{600-500}{100}\right]$$

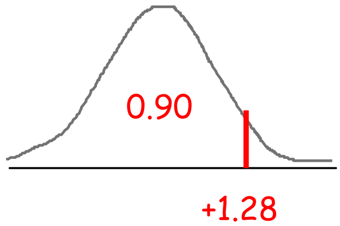
$$P[400 \leq X_i \leq 600) = P[-1 \leq Z_i \leq +1] = 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$$

$N * P[400 \leq X_i \leq 600] = 10000 P[400 \leq X_i \leq 600] = 10000(0.68268) = 6827$ empleados

Puntos Percentiles de variables con Distribución Normal

- Determinar el percentil 90% de las remuneraciones mensuales

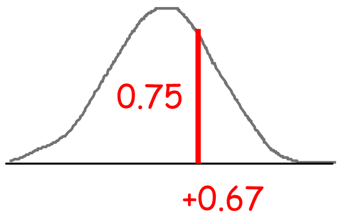
$$Z = 1.28$$
$$\frac{X-500}{100} = 1.28$$
$$X = 500 + 1.28(100) = 628$$



El **90%** de los empleados tendrán sueldos de S/ 628 ó menos

- Determinar el tercer cuartil de las remuneraciones mensuales

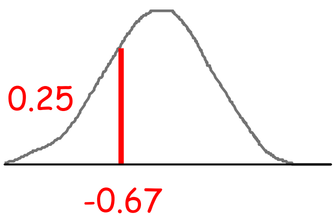
$$Z = 0.67$$
$$\frac{X-500}{100} = 0.67$$
$$X = 500 + 0.67(100) = 567$$



El **75%** de los empleados tendrán sueldos de S/ 567 ó menos

- Determinar el primer cuartil de las remuneraciones mensuales

$$Z = -0.67$$
$$\frac{X-500}{100} = -0.67$$
$$X = 500 - 0.67(100) = 433$$



El **25%** de los empleados tendrán sueldos de S/ 433 ó menos

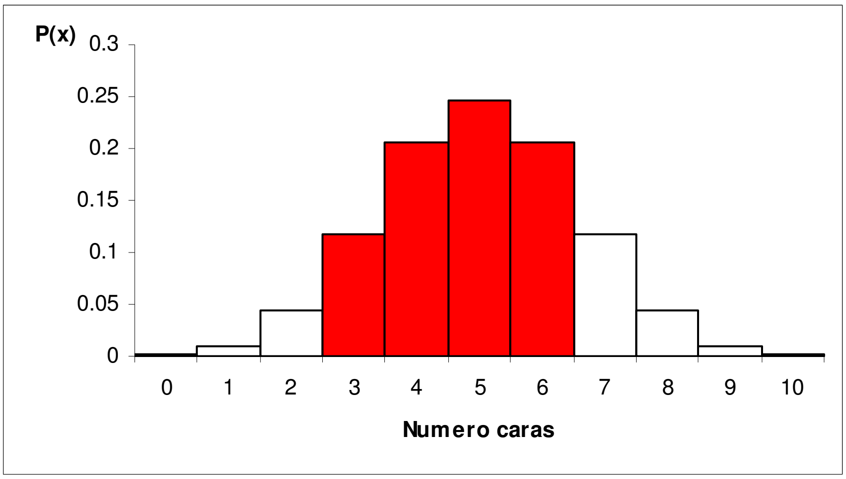
APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL A LA NORMAL

Cuando el número de observaciones es mayor a 30 (**n>30**) o el valor de **np≥5** se puede utilizar la distribución Normal para estimar las probabilidades que corresponden a la distribución Binomial.

Ejemplo: Se lanza una moneda 10 veces, la variable X_i="Número de caras" tiene distribución Binomial con media nP=10(0.5)=5 y variancia nP(1-P)=10(0.5)(0.5)=2.5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener entre 3 y 6 caras en el experimento aleatorio?

- Con la distribución Binomial: $\Pr(X) = C_X^{10}(0.50)^X(1-0.50)^{10-X}$

Xi	P(x_i)
0	0.0010
1	0.0098
2	0.0439
3	0.1172
4	0.2051
5	0.2461
6	0.2051
7	0.1172
8	0.0439
9	0.0098
10	0.0010



$$\Pr(3 \le X_i \le 6) = 0.7735$$

- Con la distribución Normal: $\mu = 10(0.5) = 5 \quad \sigma = \sqrt{10(0.5)(0.5)} = \sqrt{2.5} = 1.58$

$$P[3 \le X_i \le 6] \approx P\left[\frac{2.5-5}{1.58} \le \frac{X_i - \mu}{\sigma} \le \frac{6.5-5}{1.58}\right] = P[-1.58 \le Z_i \le 0.95] = 0.82894 - 0.05705 = 0.77189$$

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION POISSON A LA NORMAL

Cuando el valor del **np≥10** se puede utilizar la distribución Normal para estimar las probabilidades que corresponden a la distribución Poisson.

Ejemplo: Un vendedor atiende por turno a 100 clientes de los cuales sólo el 1% compra. ¿Cuál es la probabilidad que un turno cualquiera venda a 16 o más clientes?

- Con la distribución Poisson:

$$P(X_i \ge 16) = \Pr(X=16) + \Pr(X=17) + \Pr(X=18) + \Pr(X=19) + \Pr(X=20) + ...$$

$$P(X_i \ge 16) = \frac{10^{16}e^{-10}}{16!} + \frac{10^{17}e^{-10}}{17!} + \frac{10^{18}e^{-10}}{18!} + \frac{10^{19}e^{-10}}{19!} + \frac{10^{20}e^{-10}}{20!} + ...$$

$$P(X_i \ge 16) = 0.0217 + 0.0128 + 0.0071 + 0.0037 + 0.0019 + 0.0009 + 0.0004 + 0.0002 + 0.0001 = 0.0488$$

- Con la distribución Normal: $\mu = 10 \quad \sigma = \sqrt{10} = 3.16$

$$P(X_i \ge 16) \approx P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{15.5-10}{3.16}\right] = P(Z_i \ge 1.74) = 1 - 0.95907 = 0.04093$$