PROBABILIDADES

1. Definición de Probabilidad

Es una medida que expresa la "tasa de ocurrencia de un evento a largo plazo": El valor de esta medida está comprendido entre [0 y 1].Los axiomas de la probabilidad son:

$$P(A) \geq 0$$
$$P(Espacio\ \ Muestral) = 1$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(\phi) = 0$$
$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 \quad Los\ eventos\ A\ \ y\ \ A^c\ \ son\ \ eventos\ \ \ excluyentes$$

Enfoque Clásico (A priori): La probabilidad que ocurra un evento A se define como el valor que corresponde al número de casos "favorables" entre el número de casos "posibles".

$$P(A) = \frac{N(f)}{N(p)} = \frac{Numero\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo: En un cajón están las llaves de las 55 habitaciones del hotel Confort donde sólo hay 11 habitaciones que tienen aire acondicionado, si extraemos al azar una llave del cajón, la probabilidad que esta llave pertenezca a una habitación que tenga aire acondicionado es:

$$P(A) = \frac{N(f)}{N(p)} = \frac{Numero\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{11}{55} = 0.2$$

Enfoque Empírico: La probabilidad que ocurra un evento A se define como el valor que resulta de dividir el número de casos "favorables" obtenidos en una muestra entre el total de casos "observados".

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ casos\ favorables}{Tamaño\ \ de\ muestra}$$

Ejemplo: Durante el año anterior un museo recibió 12,500 visitas de las cuales 500 regresaron por lo menos una vez; por tanto, en base a la frecuencia de visitas observadas, la probabilidad que un persona que visita al museo regrese en una segunda oportunidad es:

$$P(A) = \frac{Numero\ de\ casos\ favorables}{Tamaño\ de\ muestra} = \frac{500}{12500} = 0.04$$

2. Experimento Aleatorio

Proceso que puede ser repetido indefinidamente obteniéndose resultados imprevisibles. A medida que el experimento se va repitiendo se observará que existe cierta regularidad en la frecuencia relativa de cada resultado respecto al total de pruebas.

Ejemplos:

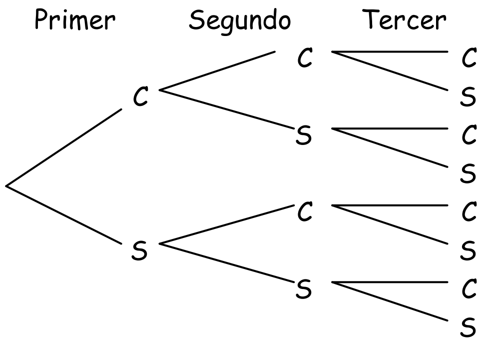
- Lanzar una moneda, se observará que un 50% resulta "cara"
- El nacimiento de un niño, se observará que la proporción de varones tiende a ser 50%
- Elegir un cliente del restaurante y preguntar su opinión sobre el servicio recibido.
- Cliente que reserva un pasaje aéreo y que no se presenta al vuelo que reservó

3. Espacio Muestral

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

- En el experimento aleatorio de lanzar una moneda balanceada 3 veces:



Evento
C C C
C C S
C S C
C S S
S C C
S C S
S S C
S S S

El espacio muestral es un conjunto formado por 8 elementos.
S= {(C,C,C); (C,C,S);(C,S,C); (C,S,S) (S,C,C) (S,C,S) (S,S,C) (S,S,S)}

- En el experimento aleatorio de lanzar un par de dados, el espacio muestral es:

S=

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

El espacio muestral está formado por 36 elementos

4. Evento o Suceso

Es un subconjunto de elementos que pertenecen al espacio muestral y que cumple una característica determinada.

Ejemplos:

- El evento de "obtener por lo menos dos caras" al lanzar una moneda 3 veces es:

E= {(C,C,C); (C,C,S);(C,S,C); (S,C,C) } tiene 4 elementos, luego la probabilidad del evento E:

$$P(E) = \frac{N(f)}{N(p)} = \frac{4}{8} = 0.500$$

- Al lanzar un par de dados, el evento "suma igual a 7" será el subconjunto:

E = { (1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) y (6, 1) }

El evento 6 elementos, por tanto la probabilidad del evento E es:

$$P(E) = \frac{N(f)}{N(p)} = \frac{6}{36} = 0.1667$$

5. Eventos Mutuamente Excluyentes

Dos eventos son mutuamente excluyentes cuando "no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo", es decir, la ocurrencia de uno de ellos impide automáticamente la ocurrencia del otro. Por tanto, si 2 eventos son mutuamente excluyentes no habrá intersección entre ellos

$$\textit{Si el evento A y el evento B son excluyentes} \; : \quad A \cap B = \phi \quad \text{Luego} \quad P(A \cap B) = 0$$

Ejemplo: Los clientes de una agencia de turismo se clasifican según nacionalidad y edad

Nacionalidad	Edad			Total
	Jóvenes	Adultos	Ancianos	
Nacionales	100	10	10	120
Extranjeros	30	30	20	80
Total	130	40	30	200

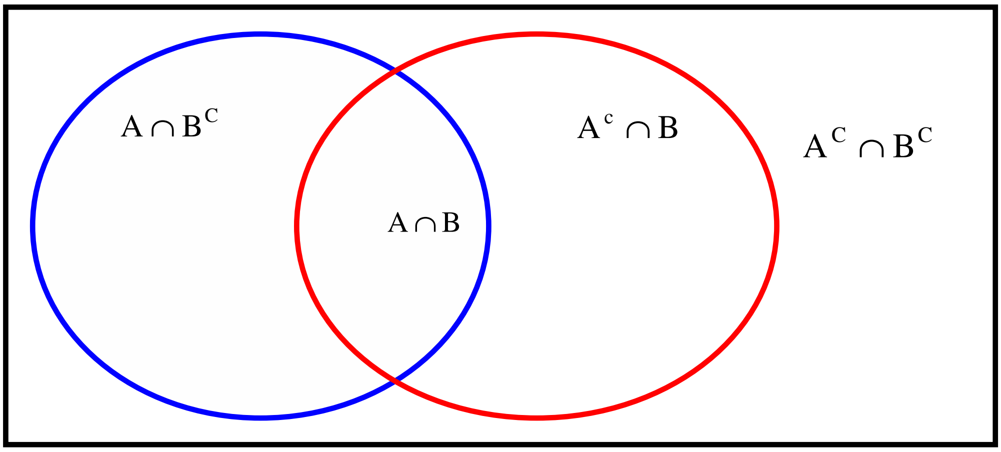
Los eventos J={Jóvenes} y A={Adultos} son mutuamente excluyentes pues si elegimos al azar un cliente de esta agencia, ningún cliente podrá pertenecer a la vez a estas dos categorías. De este modo, la probabilidad que el cliente elegido sea joven ó adulto es:

$$P(J \cup A) = P(J) + P(A) = \frac{130}{200} + \frac{40}{200} = \frac{170}{200} = 0.85$$

Sin embargo, los eventos: J={Jóvenes} y E={Extranjeros} no son mutuamente excluyentes pues habrán clientes que son jóvenes y también extranjeros; por tanto, la probabilidad que un cliente elegido al azar de esta agencia sea joven ó extranjero es:

$$P(J \cup E) = P(J) + P(E) - P(J \cap E) = \frac{130}{200} + \frac{80}{200} - \frac{30}{200} = \frac{180}{200} = 0.9$$

Si **A** y **B** son eventos <u>no excluyentes</u>: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$



Evento	A	A^c	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(A^c \cap B)$	$P(B)$
B^c	$P(A \cap B^c)$	$P(A^c \cap B^c)$	$P(B^c)$
Total	$P(A)$	$P(A^c)$	1

6. Eventos Dependientes

Los eventos A y B son dependientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de los eventos "si afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro evento". La probabilidad CONDICIONAL que ocurra el evento A cuando el evento B ya ha ocurrido se define como:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad para\ P(B)\neq o \qquad Cuando\ P(B)=0\ \ se\ toma\ \ \Pr(A|B)=0$$

$$Similarmente \qquad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$Luego \qquad P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)=P(A)P(B\mid A)$$

Ejemplo: En un conjunto de 10 pasajes aéreos 8 pueden ser transferidos (T) y 2 pasajes no pueden ser transferidos (N); si de este conjunto de pasajes elegimos al azar y "sin reemplazo" 2 pasajes; por tanto la secuencia del experimento aleatorio debe considerar que el resultado de la primera elección afectará al resultado que se obtendría en la segunda selección; luego, el esquema (árbol de probabilidad) de este experimento aleatorio será:

Primera Selección	Segunda Selección	Evento	Probabilidad
8/10 T_1	7/9 T_2	$T_1\cap T_2$	$\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{56}{90}$
	2/9 N_2	$T_1\cap N_2$	$\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{16}{90}$
2/10 N_1	8/9 T_2	$N_1\cap T_2$	$\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{16}{90}$
	1/9 N_2	$N_1\cap N_2$	$\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{90}$
		Total	1.00

Los resultados de este árbol de probabilidad puede resumirse en la tabla siguiente:

Segunda Extracción	Primera Extracción: Transferible : (T_1)	No Transferible : (N_1)	TOTAL
Transferible : (T_2)	56/90	16/90	72/90
No Transferible : (N_2)	16/90	2/90	18/90
TOTAL	72/90	18/90	1

Si la primera extracción resulta un pasaje "transferible", la probabilidad que en la segunda extracción se obtenga un pasaje "no transferible" es:

$$P(N_2\mid T_1)=\frac{P(T_1\cap N_2)}{P(T_1)}=\frac{\frac{16}{90}}{\frac{72}{90}}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$$

Habiéndose extraído un pasaje "transferible" en la primera extracción, la probabilidad que en la segunda extracción también se obtenga un pasaje "transferible" será:

$$P(T_2\mid T_1)=\frac{P(T_1\cap T_2)}{P(T_1)}=\frac{\frac{56}{90}}{\frac{72}{90}}=\frac{56}{72}=\frac{7}{9}$$

7. Eventos Independientes

Se dice que los eventos A y B son independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de los eventos "no afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro evento". Por tanto, las probabilidades no se modificarán por el hecho que hay independencia de los eventos:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\textit{Similarmente} \qquad P(B|A) = P(B)$$

$$\textit{Luego} \qquad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo: Si del conjunto de 10 pasajes aéreos donde 8 son transferibles (T) y 2 pasajes no pueden ser transferidos (N), elegimos al azar y "con reemplazo" 2 pasajes; la secuencia del experimento aleatorio debe considerar que el resultado de la primera elección no afecta al resultado de la segunda selección; de este modo el árbol de probabilidades es:

Primera Selección	Segunda Selección	Evento	Probabilidad
8/10 T_1	8/10 T_2	$T_1 \cap T_2$	64/100=0.64
	2/10 N_2	$T_1 \cap N_2$	16/100=0.16
2/10 N_1	8/10 T_2	$N_1 \cap T_2$	16/100=0.16
	2/10 N_2	$N_1 \cap N_2$	4/100=0.04
		Total	1.00

Los resultados de este árbol de probabilidad puede resumirse en la tabla siguiente:

Segunda Extracción	Primera Extracción		TOTAL
	Transferible : (T_1)	No Transferible : (N_1)	
Transferible : (T_2)	0.64	0.16	0.80
No Transferible : (N_2)	0.16	0.04	0.20
TOTAL	0.80	0.20	1

Si la primera extracción resulta un pasaje "transferible", la probabilidad que en la segunda extracción se obtenga un pasaje "no transferible" es:

$$P(N_2 | T_1) = \frac{P(T_1 \cap N_2)}{P(T_1)} = \frac{0.16}{0.80} = \frac{2}{10} = P(N_2)$$

Habiéndose extraído un pasaje "transferible" en la primera extracción, la probabilidad que en la segunda extracción también se obtenga un pasaje "transferible" será:

$$P(T_2 | T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \frac{0.64}{0.80} = \frac{8}{10} = P(T_2)$$

Por ser independientes:

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(T_2) = (0.80)(0.80) = 0.64$$
$$P(T_1 \cap N_2) = P(T_1)P(N_2) = (0.80)(0.20) = 0.16$$
$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2) = (0.20)(0.20) = 0.04$$

8. Probabilidad Total

En el espacio muestral S se define una probabilidad P y los eventos {A1, A2, A3,....An} son mutuamente excluyente dos a dos cumplen con la propiedad:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ......\cup A_n = S \qquad entonces \qquad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid A_i)P(A_i)$$

Demostración

$$A = S \cap A$$

$$A = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ......\cup A_n) \cap A$$

$$A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A) \cup (A_3 \cap A) \cup ......\cup (A_n \cap A)$$

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}[(A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A) \cup (A_3 \cap A) \cup ......\cup (A_n \cap A)]$$

Como son eventos mutuamente excluyentes

$$P(A) = \mathrm{P}(A_1 \cap A) + P(A_2 \cap A) + P(A_3 \cap A) + ... + P(A_n \cap A)$$

$$P(A) = P(A \mid A_1)P(A_1) + P(A \mid A_2)P(A_2) + ... + P(A \mid A_n)P(A_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

Ejemplo: El total de préstamos de una sucursal bancaria fue aprobado por dos sectoristas de crédito, el sectorista S_1 aprobó el 60% de los préstamos y el sectorista S_2 aprobó el 40% restante. La probabilidad que el sectorista S_1 apruebe un préstamo incobrable (I) es 0.01; mientras para el sectorista S_2 esta probabilidad es 0.02. Si de la cartera total de prestamos de la sucursal elegimos al azar un préstamo, ¿Cuál es la probabilidad que el préstamo elegido sea incobrable?

Se trata de un experimento aleatorio "secuencial" por tanto, el árbol de probabilidades es:

Sectorista	Incobrable	Evento	Probabilidad
0.6 **S_1**	0.01 **I**	**$S_1 \cap I$**	(0.6)(0.01)=0.006
	0.99 **N**	**$S_1 \cap N$**	(0.6)(0.99)=0.594
0.4 **S_2**	0.02 **I**	**$S_2 \cap I$**	(0.4)(0.02)=0.008
	0.98 **N**	**$S_2 \cap N$**	(0.4)(0.98)=0.392
		Total	1.00

La probabilidad total que el préstamo elegido sea incobrable será:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{2} P(I \mid S_i)P(S_i) = P(I \mid S_1)P(S_1) + P(I \mid S_2)P(S_2) = (0.01)(0.6) + (0.02)(0.4) = 0.014$$

El cuadro resumen de las probabilidades del experimento es:

Tipo de Préstamo	Sectorista 1 (**S_1**)	Sectorista 2 (**S_2**)	Total
Incobrable (**I**)	0.006	0.008	0.014
No Incobrable (**N**)	0.594	0.392	0.986
Total	0.600	0.400	1.000

9. TEOREMA DE BAYES

En el contexto de los eventos secuenciales" la probabilidad "condicional" que ocurra el evento A $_i$ "dado que ha ocurrido el evento A" estará dado por la relación siguiente:

$$P(A_i \mid A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid A_j)P(A_j)}$$

Cuantifica la probabilidad condicional de un evento que ocurra en la primera posición secuencial dado que ya ha ocurrido un evento específico en la segunda posición secuencial.

En el ejemplo anterior si el préstamo elegido al azar resultó ser incobrable (I), ¿cuál es la probabilidad que este préstamo haya sido aprobado por el sectorista S_1.?

$$P(S_1 \mid I) = \frac{P(I \mid S_1)P(S_1)}{P(I \mid S_1)P(S_1) + P(I \mid S_2)P(S_2)} = \frac{(0.01)(0.6)}{(0.01)(0.6) + (0.02)(0.4)} = \frac{0.006}{0.014} = 0.4286$$

La probabilidad "APRIORI" que un préstamo elegido al azar sea concedido por el sectorista S_1 es $P(S_1)=0.60$ Con el teorema de Bayes se determina la probabilidad "APOSTERIORI" $P(S_1|I)=0.4286$ que viene a ser una probabilidad corregida en base la evidencia de una observación reciente. Este procedimiento permite revisar y corregir la probabilidad de un evento con el fin de reducir el riesgo en la toma de decisiones.

Ejemplo. Una cadena de hoteles está estudiando la posibilidad de abrir un nuevo hotel en Cajamarca, para tomar una decisión definitiva la gerencia considera de gran importancia que el Banco Progreso les apruebe el préstamo que está solicitando actualmente. Si se les concede el préstamo, la probabilidad de abrir el nuevo hotel es 0.90; contrariamente, si no recibe el préstamo, la probabilidad de abrir el nuevo hotel sólo es 0.20. La presidencia estima que la probabilidad de recibir el préstamo es 0.60.

Encuentre:

- La probabilidad que la cadena de hoteles instale el nuevo hotel en Cajamarca
- Se sabe que el hotel de Cajamarca fue abierto, ¿cuál es la probabilidad que haya recibido el préstamo?

Préstamo	Apertura	Evento	Probabilidad
0.6 S_P	0.9 S_A	$S_p \cap S_A$	(0.6)(0.9)=0.54
	0.1 N_A	$S_p \cap N_A$	(0.6)(0.1)=0.06
0.4 N_P	0.2 S_A	$N_p \cap S_A$	(0.4)(0.2)=0.08
	0.8 N_A	$N_p \cap N_A$	(0.4)(0.8)=0.32
		Total	1.00

$$\Pr obabilidad\ \ Total\ \ de\ \ aperturar\ \ \ el\ hotel$$

$$P(S_A) = P(S_P)P(S_A \mid S_P) + P(N_P)P(A \mid N_P) = (0.6)(0.9) + (0.4)(0.2) = 0.54 + 0.08 = 0.62$$

$$\Pr obabilidad\ \ Condicional$$

$$P(S_P \mid S_A) = \frac{P(S_P \cap S_A)}{P(S_A)} = \frac{0.54}{0.62} = 0.871 \quad \text{Probabilidad Aposteriori}$$

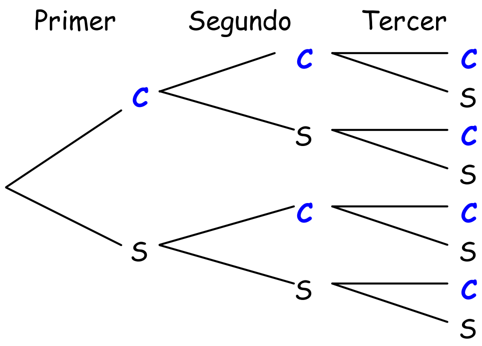
VARIABLE ALEATORIA

Es un "evento numérico" cuyo valor resulta de un proceso aleatorio y que corresponde a cada unidad de análisis; por su naturaleza la variable aleatoria se clasifican en:

1. Variables Aleatorias **Cualitativas**: Expresan atributos o categorías
2. Variables Aleatorias **Cuantitativas**: Se expresan en forma numérica, pueden ser:

- **Cuantitativas Discretas**: Toman valores "enteros" y se pueden enumerar todos sus valores posibles junto a sus respectivas probabilidades de ocurrencia.
- **Cuantitativas Continuas**: Toman valores que se expresan con cualquier valor de un intervalo de los números reales. No es posible listar todos los valores que toma la variable junto a sus probabilidades correspondientes, por tanto, estas probabilidades se determinan a través de una función matemática o "curva de probabilidades".

Ejemplo: Sea el experimento en que se lanza una moneda 3 veces y se define la variable aleatoria X_i = Número de caras que resultan en cada uno de los resultados posibles.

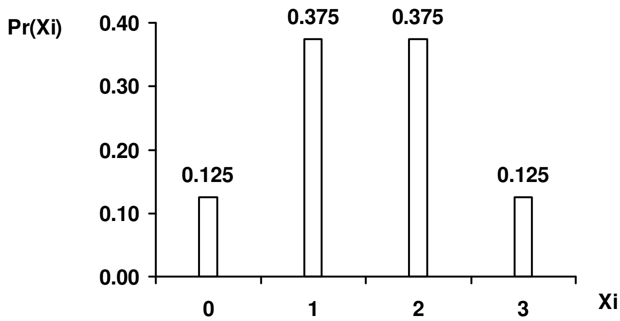


Evento	Xi	Pr(Xi)
C C C	3	0.125
C C S	2	0.125
C S C	2	0.125
C S S	1	0.125
S C C	2	0.125
S C S	1	0.125
S S C	1	0.125
S S S	0	0.125

Luego los resultados pueden resumirse en la tabla de frecuencia siguiente:

X_i	$P(X_i)$
0	0.125
1	0.375
2	0.375
3	0.125
Total	1

Histograma:



$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0.375 + 0.125 = 0.50$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES DE VARIABLES DISCRETAS

Sea la variable aleatoria X_i que toma valores discretos y las probabilidades siguientes:

X_i	$P(X_i)$
X_1	$P(X_1)$
X_2	$P(X_2)$
X_k	$P(X_k)$
Total	1

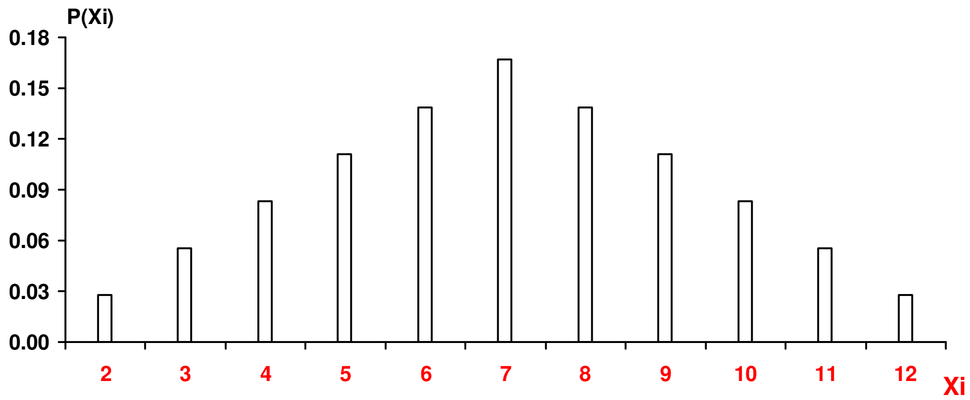
La función $0 \le P(X_i) \le 1$ se denomina "función de probabilidad" donde: $\sum_{i=1}^{k} P(X_i) = 1$

Ejemplo: Al lanzar un par de dados balanceados, el espacio muestral es:

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

El espacio muestral tiene 36 elementos y en él se define la variable aleatoria :
X_i : Suma de los puntos del par de dados lanzados

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(X_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
$P(X_i)$	0.027	0.056	0.083	0.111	0.139	0.167	0.139	0.111	0.083	0.056	0.027	1



|-- 2.415 -----|------- 2.415--|
E(X)=7

Para este experimento, la probabilidad de obtener los resultados siguientes será:

- $P(X = 7) = 6/36 = 0.1667$
- $P(X < 4) = Pr(X=2)+Pr(X=3) = 1/36+2/36 = 3/36 = 0.0833$
- $P(X > 9) = Pr(X=10)+Pr(X=11)+Pr(X=12) = 3/36+2/36+1/36 = 6/36 = 0.1667$
- $P(X \ge 4) = 1-[P(X=2)+P(X=3)]=1-0.0833=0.9167$

Valor Esperado o Esperanza Matemática de una Variable Aleatoria

Es el promedio ponderado de los valores X_i utilizando como factores de ponderación las respectivas probabilidades de ocurrencia P(X_i). Es el valor de la variable aleatoria que esperaríamos encontrar con mayor probabilidad a "Largo Plazo".

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{k} X_i P(X_i) = X_1 P(X_1) + X_2 P(X_2) + \ldots.. + X_k P(X_k)$$

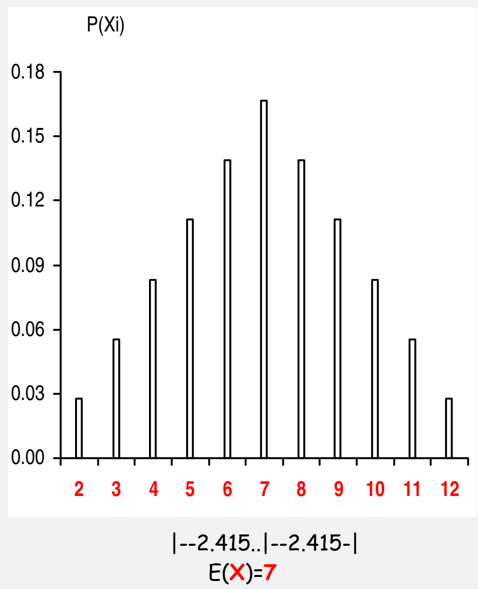
Variancia de una Variable Aleatoria

Es la medida de variabilidad que registra la variable aleatoria respecto al valor promedio de la distribución de probabilidad.

$$V(X_i) = \sum_{i=1}^{K} X_i^2 P(X_i) - [E(X_i]^2$$

La variable aleatoria X_i :"<u>Suma de los puntos a lanzar un par de dados</u>" es una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad es:

X_i	P(X_i)	$X_iP(X_i)$	$X_i^2\ P(X_i)$
2	1/36	2/36	4/36
3	2/36	6/36	18/36
4	3/36	12/36	48/36
5	4/36	20/36	100/36
6	5/36	30/36	180/36
7	6/36	42/36	294/36
8	5/36	40/36	320/36
9	4/36	36/36	324/36
10	3/36	30/36	300/36
11	2/36	22/36	242/36
12	1/36	12/36	144/36
Total	1	252/36	1974/36



La esperanza matemática de la variable aleatoria X_i : <u>Suma de los puntos del par de dados</u>, será el valor que esperaríamos obtener a "largo plazo" si repetimos el experimento:

El valor esperado de Xi es: $E(X_i) = \sum_{i=1}^{k} X_i P(X_i) = \frac{252}{36} = 7$ puntos

La Variancia de Xi es: $V(X_i) = \sum_{i=1}^{K} X_i^2\ P(X_i) - \{E(X_i)\}^2 = \frac{1974}{36} - (7)^2 = 5.8333$

La Desviación Estándar de Xi es: $S(X_i) = \sqrt{5.8333} = 2.415$ puntos

Coeficiente de variación de Xi es: CV(Xi)= (2.415/7)100=34.5%

Valor Esperado o Esperanza Matemática en la Toma de Decisiones

Se lanzará un par de dados balanceados, definirá la variable aleatoria X_i :"Suma de los puntos resultante" y se plantea el juego siguiente:

- Por cada punto logrado se dará un premio de 10 soles
- El que desea participar en este juego debe pagar 50 soles.

Calcule la utilidad esperada que tendrá cada participante del juego y su coeficiente de variación correspondiente:

X_i	$P(X_i)$	Premio $10X_i$	Costo	Utilidad U_i	$U_iP(U_i)$	$U_i^2\ P(U_i)$
2	1/36	20	50	-30	-30/36	900/36
3	2/36	30	50	-20	-40/36	800/36
4	3/36	40	50	-10	-30/36	300/36
5	4/36	50	50	0	0	0
6	5/36	60	50	10	50/36	500/36
7	6/36	70	50	20	120/36	2400/36
8	5/36	80	50	30	150/36	4500/36
9	4/36	90	50	40	160/36	6400/36
10	3/36	100	50	50	150/36	7500/36
11	2/36	110	50	60	120/36	7200/36
12	1/36	120	50	70	70/36	4900/36
Total	1				720/36	35400/36

La esperanza matemática del juego:

El valor esperado de Ui es: $E(U_i) = \sum_{i=1}^{k} U_i P(U_i) = \frac{720}{36} = 20$ **soles**

La variancia de Ui es: $V(U_i) = \sum_{i=1}^{K} U_i^2\ P(U_i) - \{E(U_i)\}^2 = \frac{35400}{36} - (20)^2 = 583.33$

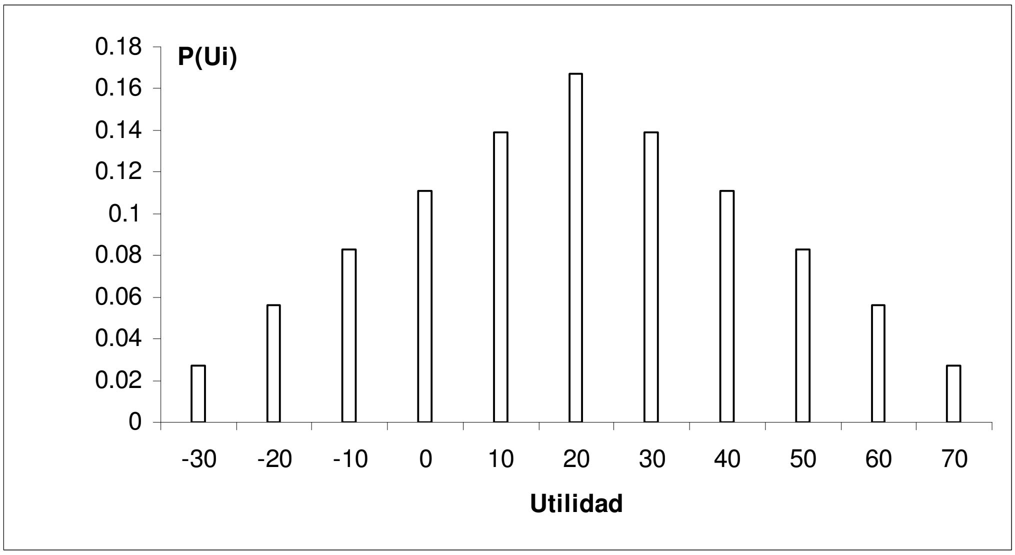
La Desviación Estándar de Ui es: $S(U_i) = \sqrt{583.33} = 24.15$ **soles**

Coeficiente de variación de Ui es: CV(Ui)= (24.15/20)100=120.76%

Nota: para este caso la utilidad se expresa como la transformación: $\boxed{U_i = 10X_i - 50}$

$$\bar{U} = 10\bar{X} - 50 = 10(7) - 50 = 20 \text{ soles}$$
$$S_U^2 = 10^2 S_X^2 = 10^2(5.833) = 583.33$$
$$S_U = 10S_X = 10(2.415) = 24.15$$

Histograma:



E(Ui)=20

|----------24.15……….|------------24.15----|

-4.15 **44.15**

Preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad de 20 soles?: 6/36
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad de 20 soles ó menos?: 21/36
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad de más de 20 soles?: 15/36
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad de más de 50 soles?: 6/36
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad entre 0 y 40 soles?: 24/36
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad entre el promedio mas menos una desviación estándar?:
  P(-4.15 < Utilidad < 44.15) ≈ P(0< Utilidad < 40)= 24/36= 0.6667
- ¿Cuál es la probabilidad de lograr una utilidad entre el promedio mas menos una desviación estándar?:Por la regla empírica: 0.68